

Б. ЛЕНЕРТ

**ДИНАМИКА  
ЗАРЯЖЕННЫХ  
ЧАСТИЦ**

*Перевод с английского  
А. В. Гордеева, А. А. Иванова, Г. В. Шолина*



**АТОМИЗДАТ  
Москва 1967**

DYNAMICS  
OF  
CHARGED PARTICLES

by

BO LEHNERT

*Associate Professor  
of Plasma Physics and Thermonuclear Research  
Swedish Atomic Research Council*

1 9 6 4

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY  
AMSTERDAM

## *Предисловие к русскому изданию*

Профессор Стокгольмского Королевского технологического института Б. Ленерт — один из представителей возглавляемой известным ученым Х. Альфвенем группы скандинавских физиков в области изучения замагниченной плазмы. Ему принадлежат фундаментальные исследования устойчивости положительного столба плазмы и диффузии заряженных частиц поперек магнитного поля.

Книга посвящена динамике ионизованного вещества. Изложение материала — дедуктивное. После краткого исторического введения и обзора наиболее общих аспектов динамики плазмы в гл. 2 приводятся основные уравнения классической механики и электродинамики и некоторые точные решения для них. Эти решения используются в последующих главах для анализа сложных явлений, происходящих в плазме. Начиная с гл. 3 излагаются основные вопросы теории плазмы, которые включают дрейфовую теорию движения заряженных частиц (гл. 3), теорию адиабатических инвариантов (гл. 4) и применения этих теорий к явлениям магнитного сжатия (гл. 6), удержания (гл. 7) и устойчивости плазмы, захваченной в магнитное поле (гл. 8). Помимо этого в гл. 5 излагаются основы макроскопической теории динамики замагниченной плазмы. Это позволяет обосновать макроскопический подход к явлениям, теория которых изложена в гл. 6, 7 и 8. Обобщение теории на релятивистский случай дается в гл. 9, а в последней главе излагаются проблемы излучения плазмы.

Как видно из приведенного перечисления, книга Б. Ленерта посвящена в основном изучению плазмы методом траекторий отдельных заряженных частиц. Советскому читателю уже известны специальные обзоры Д. В. Сивухина [1] и А. И. Морозова и Л. С. Соловьева [2], посвященные той же теме. Однако они рассчитаны в основном на физиков-теоретиков, занимающихся про-

блемой управляемых термоядерных реакций. Настоящая книга представляет интерес для инженеров и научных сотрудников, занимающихся исследованиями плазмы как космического, так и лабораторного масштаба. Можно смело утверждать, что ясность изложения и большое педагогическое мастерство автора позволят этой книге занять прочное место среди учебных пособий по курсу классической электродинамики, преподаваемому на физических факультетах университетов и в физико-технических вузах.

При чтении книги следует, однако, иметь в виду, что она была закончена автором в 1962 г., а 5 лет для столь бурно развивающейся области, как физика плазмы, — довольно большой срок. Поэтому некоторые высказывания автора кажутся сегодня уже несколько анахроничными. В первую очередь это относится к поведению частиц в пробкотронах. Открытие конусной неустойчивости [3, 4] привело к тому, что перспектива использования пробкотрона в качестве ловушки для высокотемпературной плазмы стала выглядеть далеко не столь обнадеживающей, как это представлялось прежде. Поскольку изучение кинетических неустойчивостей, к разряду которых относится и конусная, вообще выходит за рамки данной книги, то в русское издание не было внесено каких-либо исправлений и добавлений, а были сделаны лишь краткие примечания. Это касается также некоторых вопросов, связанных с нарушением адиабатичности, излучением плазмы и др. Более подробно можно познакомиться с этими вопросами в работах [5, 6].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д. В. В кн. «Вопросы теории плазмы». Вып. 1. М. Госатомиздат, 1933, стр. 3.
2. Морозов А. И., Соловьев Л. С. В кн. «Вопросы теории плазмы». Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, стр. 177.
3. M. Rosenbluth, R. F. Post. Phys. Fluids, 8, No 3, 547 (1965).
4. Короблев Л. В. «Письма ЖЭТФ», № 5, стр. 137 (1966).
5. Лонгмайр К. «Физика плазмы». М., Атомиздат, 1966.
6. Вопросы теории плазмы. Вып. 1—3. М., Госатомиздат, 1963.



### § 1.1. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Законы классической механики и электродинамики известны со времен Ньютона и Максвелла. Применение этих законов к движению заряженных частиц уже давно привлекало внимание специалистов разных областей физики. В 1907 г. Штермер [1] начал изучать траектории заряженных частиц в поле магнитного диполя. Полученные им результаты позднее применялись в исследованиях космических лучей и траекторий заряженных частиц космического происхождения в магнитном поле Земли. Классическую теорию движения заряженных частиц использовали также в своих ранних работах по теории строения атома Томсон [2], Резерфорд [3], Бор [4] и др. Среди многочисленных технических применений динамики заряженных частиц можно отметить проектирование и изучение электронных ламп. Внедрение таких ламп началось уже в 1890 г., но теоретические основы электронной оптики впервые полностью были сформулированы Бушем в 1926 г. [5].

В 1908 г. Хейл [6] обнаружил существование сильных магнитных полей в области солнечных пятен. Именно с этого времени астрономы и астрофизики начинают интересоваться поведением ионизованного вещества в магнитном поле.

В 1937 г. Ферраро [7] показал, что участки намагниченного ионизованного тела в каждой точке на силовой линии магнитного поля вынуждены вращаться с одной и той же угловой скоростью. Этот закон изоротации характеризует один из основных механизмов взаимодействия заряженных частиц с магнитным полем. Важность его стала особенно очевидной после того, как в 1942 г. Альфвен [8] показал, что силовые линии магнитного поля ведут себя подобно упругим нитям, которые «вморожены» в ионизованное вещество. При этом вдоль магнитных силовых линий могут распространяться магнитогидродинамические волны. Открытие Альфве-

ном этих волн послужило толчком к бурному росту исследований магнитоактивных и электропроводящих сред. Для теоретического описания плазмы использовалось как гидродинамическое приближение, так и изучение движения отдельных частиц. Одночастичное рассмотрение основывалось на изучении траекторий движения при помощи теории возмущений, сформулированной впервые Альфвеном [9, 10]. Существенный прогресс в этом направлении был достигнут также Чепменом и Каулингом [11], Спитцером [12, 13] и некоторыми другими учеными.

Особенно широкий размах исследования по физике плазмы приняли в последнее десятилетие в связи с изучением управляемых термоядерных реакций. Задачи, возникающие здесь, тесно связаны с проблемами космической физики. Это изучение траекторий движения заряженных частиц в электрическом и магнитном полях, определение запрещенных областей для движения частиц, диффузия плазмы поперек магнитного поля, волновые явления и устойчивость, а также излучение плазмы [14—16].

Совсем недавно для физики ионизованного вещества найдена еще одна область применения — магнитогиродинамические преобразователи энергии. В этих устройствах тепловая энергия ионизованного газа непосредственно преобразуется в электрическую благодаря генерации токов при расширении плазмы поперек магнитного поля.

Отдельные вопросы динамики заряженных частиц в электрическом и магнитном полях уже рассматривались в обзорах [17, 18] и монографиях [19—29].

## **§ 1.2. ДИНАМИКА ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА**

Динамика ионизованного газа подчиняется уравнениям, которые были хорошо известны уже в конце прошлого столетия. Однако для многих важных теоретических задач окончательного решения до сих пор нет. Это связано с тем, что между ионизованным веществом и электрическими и магнитными полями одновременно может существовать несколько типов взаимодействия. Многочисленные комбинации между ними обуславливают необыкновенную сложность этой системы.

Теоретическое исследование ионизованного газа начнем с изучения движения отдельной заряженной частицы в заданных электрическом и магнитном полях. При этом траекторию частицы можно рассчитать с помощью уравнений движения. В большинстве интересных случаев, однако, эти вычисления математически необычайно сложны, а результаты не поддаются наглядной интерпретации. Физическую картину движения заряженных частиц помогает уяснить теория возмущений, которая дает приближенное решение для средней траектории частицы. Это решение описывает движение так называемого ведущего центра, вокруг которого вращается заряженная частица. Теория возмущений содержит ряд приближенных интегралов движения. Она служит весьма удобным инструментом для вычисления траекторий частиц и значительно облегчает физическую интерпретацию.

Однако при использовании теории возмущений для описания динамики ионизованного вещества необходимо соблюдать осторожность. Следует иметь в виду, что траектории частиц есть результат дрейфового движения ведущего центра и накладываемого на этот дрейф вращения. Поэтому перенос вещества, импульса и энергии определяется не только движением ведущих центров, но также и вращением. То, что частицы вращаются по траекториям, близким к круговым, приводит к результатам, которые, на первый взгляд, могут показаться довольно неожиданными. Так, например, полный поток частиц может существовать даже без какого-либо движения ведущих центров, а в некоторых случаях справедливо и обратное утверждение. В правильности этих положений можно убедиться, исследуя полное движение частицы.

Следующим этапом является рассмотрение ионизованного газа в области больших плотностей, которая представляет наибольший интерес для прикладных исследований. В этом случае даже малейшее смещение ионов относительно электронов приводит к появлению больших пространственных зарядов. При этом уже нельзя считать, что электрические поля определяются только внешними источниками, так как появляются электрические поля, связанные с разделением зарядов. В то же время пространственные заряды очень чувстви-

тельны к изменению траекторий частиц. Поэтому правильные значения пространственных зарядов и электрических полей получают при вычислении траекторий частиц с более высокой степенью точности. Это означает также, что можно прийти к ошибочным выводам, если представления о движении отдельной частицы, полученные в наименьшем порядке теории возмущений, перенести на ионизованный газ.

Движение поверхностей постоянной плотности создает иногда дополнительное разделение зарядов. Это происходит при скоростях, которые отличаются как от средней скорости частиц, так и от скорости ведущих центров. В некоторых случаях деформации пространственного распределения ионов и электронов неодинаковы. Возникающий при этом дрейф частиц поперек магнитного поля приводит к образованию пространственного заряда, изменяющего электрические поля и траектории частиц.

Трудности, которые возникают при рассмотрении подобных эффектов, можно преодолеть, развивая последовательную теорию возмущений. Для этого удерживают следующие члены разложения как в дрейфовом движении ведущего центра, так и во вращательном движении частиц и учитывают, таким образом, влияние вращения на дрейф. В какой-то степени такие проблемы можно исключить при макроскопическом подходе, который использует уравнения для усредненных величин. При этом, однако, возникает другая трудность, связанная с определением тензора давления. Чему отдать предпочтение: макроскопической или дрейфовой теории, зависит от конкретной ситуации. Иногда предпочтительнее даже непосредственное решение уравнения Больцмана.

Наконец, если нельзя пренебречь индуцированными электрическими токами, то магнитное поле нельзя больше рассматривать как заданное. Тогда частицы оказываются связанными с электромагнитным полем не только уравнением движения, но также и законом индукции. В общем случае существует также связь между частицами и электромагнитным полем излучения.

# ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе приведен обзор основных представлений электродинамики и классической механики. При этом не ставится задача дать краткое описание этих дисциплин. Излагаются только те разделы, которые используются в последующих главах. Подробное изложение классической механики и электродинамики можно найти в монографиях [29—33].

### § 2. 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ

Рассмотрим частицы, которые представляют собой точечные электрические заряды, движущиеся в вакууме под действием электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{B}$  полей. Эти поля создаются внешними источниками или точечными зарядами. Микрополя, образуемые отдельными зарядами, исследуются только для нескольких частных случаев, относящихся к столкновениям частиц. В большей части книги истинные электрические и магнитные поля будут заменены значениями, усредненными по макроскопически малым пространственным и временным областям. В плазме такой подход считается оправданным, поскольку среднее расстояние между частицами достаточно велико, чтобы можно было пренебречь квантовыми эффектами.

Однако неизвестно, справедлив ли такой подход и для твердого тела, например для изучения движения электронов в металлах, а также при рассмотрении магнитных свойств железа. Даже в классическом пределе физический смысл средних значений электрических и магнитных полей, индуцируемых движущимися ионами и электронами, не вполне ясен из-за дальнедействующего характера взаимодействия.

## 1. 1. Уравнения Максвелла

Электромагнитное поле подчиняется уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

где равенство (2.1) — закон электромагнитной индукции, а (2.2) выражает магнитное поле через его источники. Магнитное поле может создаваться как плотностью электрического тока  $\vec{j}$ , возникающего благодаря упорядоченному движению зарядов, так и током смещения, определяемым последним членом из уравнения (2.2). Магнитная и диэлектрическая проницаемости вакуума обозначены  $\mu_0$  и  $\epsilon_0$ . При определении плотности тока число частиц в макроскопическом элементе объема считается достаточно большим и  $\vec{j}$  задается средним потоком зарядов через единицу поверхности. Аналогично можно определить электрический заряд  $\sigma$  в единице объема и закон сохранения заряда записать как

$$\operatorname{div} \vec{j} = - \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Поскольку операторы  $\vec{\nabla}$  и  $\partial/\partial t$  коммутируют, применение операции  $\operatorname{div}$  к уравнениям (2.1) и (2.2) вместе с уравнением (2.3) дает

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (2.4)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} - \sigma) = 0. \quad (2.5)$$

Если допустить, что в некоторый начальный момент времени поля равны нулю, то

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (2.6)$$

и

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.7)$$

Однако уравнения (2.2), (2.5) и (2.7) справедливы только для вакуума. При рассмотрении электрических и магнитных свойств конденсированных сред их следует модифицировать. При феноменологическом подходе этого можно достичь, если для описания явлений электрической и магнитной поляризации ввести понятия электрической и магнитной восприимчивости, которые рассматриваются при этом как макроскопические свойства среды.

Аналогичный подход возможен и при изучении ионизованного газа, но необходимость в этом возникает довольно редко, так как все электрические токи и заряды явно учтены в уравнениях (2.2), (2.3) и (2.7). Решая эти уравнения вместе с уравнениями движения ионизованного газа, можно непосредственно изучать явления поляризации. При этом не нужно вводить ни диэлектрической, ни магнитной проницаемости.

Хотя эти концепции предпочтительнее всех других, ими следует пользоваться с осторожностью. В плазме иногда могут существовать такие эффекты, которые не удастся выразить через эти эквивалентные параметры. Поэтому необходимо подробно исследовать каждый частный случай. В § 3.2 и разделах 2.4 и 2.5 гл. 8 приведены примеры такого детального анализа.

Условие (2.6) означает, что  $\vec{B}$  всегда можно представить в виде ротора от векторного потенциала  $\vec{A}$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (2.8)$$

Тогда выражение (2.1) принимает вид

$$\operatorname{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.9)$$

или

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (2.10)$$

где  $\varphi$  — скалярный электрический потенциал. Подставляя выражения (2.8) и (2.10) в уравнение (2.2), получаем

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left( \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{j}, \quad (2.11)$$

где  $c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2}$  — скорость света. Кроме того, из уравнений (2.10) и (2.7) следует

$$\vec{\nabla}^2 \varphi + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (2.12)$$

До сих пор магнитное поле  $\vec{B}$  не было однозначно связано с вектором  $\vec{A}$ , поскольку к  $\vec{A}$  всегда можно прибавить градиент  $\vec{\nabla} \chi$  произвольной скалярной функции  $\chi$ , не нарушая соотношения (2.8). Итак, вектор

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \quad (2.13)$$

удовлетворяет соотношению (2.8). Для того чтобы электрическое поле по-прежнему определялось соотношением (2.10), вместо  $\varphi$  нужно ввести потенциал

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Замена потенциалов  $\vec{A}$  и  $\varphi$  величинами  $\vec{A}'$  и  $\varphi'$  называется калибровочным преобразованием. Особый интерес представляет такое калибровочное преобразование, для которого выражение

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \operatorname{div} \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \vec{\nabla}^2 \chi + \\ &+ \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

равно нулю.

Поскольку функция  $\chi$  произвольна, то при соответствующем выборе ее это всегда выполнимо. В результате получается условие Лоренца

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (2.16)$$



При помощи этого условия уравнения (2.11) и (2.12) можно записать в виде неоднородных волновых уравнений

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}; \quad (2.17)$$

$$\vec{\nabla}^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.18)$$

Полное решение уравнений (2.17) и (2.18) является суммой общего решения однородного уравнения с правой частью, равной нулю, и частного решения неоднородного уравнения

$$\vec{A}(\rho, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\rho^*, t - R^*/c)}{R^*} dV^* \quad (2.19)$$

или

$$\varphi(\rho, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\rho^*, t - R^*/c)}{R^*} dV^*. \quad (2.20)$$

Здесь  $\vec{\rho}$  — радиус-вектор точки наблюдения;  $\vec{\rho}^*$  — радиус-вектор элемента объема распределения заряда и тока, а  $\vec{R}^* = \vec{\rho} - \vec{\rho}^*$ . Интегрирование по элементам объема  $dV^*$  распределения заряда и тока выполняется в момент времени  $t^* = t - R^*/c$ . Решения (2.19) и (2.20) называют запаздывающими потенциалами. Они также удовлетворяют условию (2.16).

## 1. 2. Координаты магнитного поля

При изучении движения частицы в магнитном поле иногда удобно описывать последнее двумя скалярными функциями  $\alpha$  и  $\beta$ , впервые введенными Якоби [34] и Штермером [35], а позднее использовавшимися Свитом [36], Лундквистом [37], Грэдом и Рубином [38]. Любой вектор  $\vec{A}$  можно представить в виде

$$\vec{A} = \alpha \vec{\nabla} \beta + \vec{\nabla} \chi. \quad (2.21)$$

Тогда магнитное поле  $\vec{B}$ , определяемое при помощи соотношения (2.8), можно записать в виде

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\alpha \times \vec{\nabla}\beta. \quad (2.22)$$

Если  $\vec{\nabla}\alpha$  и  $\vec{\nabla}\beta$  не равны нулю, то они обязательно перпендикулярны  $\vec{B}$ . Легко убедиться непосредственной проверкой, что дивергенция поля, определяемого этим уравнением, равна нулю. Отсюда следует, что магнитные силовые линии определяются пересечением поверхностей  $\alpha = \text{const}$  и  $\beta = \text{const}$  и каждой силовой линии можно сопоставить два значения  $\alpha$ ,  $\beta$ .

Введем, кроме того, координату  $s$ , измеряемую длиной дуги вдоль некоторой силовой линии. Величины  $s$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  можно использовать в качестве криволинейных координат. Нередко они являются «естественными» координатами в задачах, где магнитное поле играет решающую роль. Следует иметь в виду, что при изменении во времени магнитного поля эти координаты также изменяются и, кроме того,  $\partial\alpha/\partial t$  и  $\partial\beta/\partial t$  необязательно постоянны вдоль силовой линии, поскольку поле может изменяться в пространстве и времени.

При специальном выборе калибровки, когда  $\chi = 0$ , подстановка формулы (2.21) в уравнение (2.10) для электрического поля дает после дифференцирования следующее соотношение:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\left(\varphi + \alpha \frac{\partial\beta}{\partial t}\right) + \frac{\partial\beta}{\partial t} \vec{\nabla}\alpha - \frac{\partial\alpha}{\partial t} \vec{\nabla}\beta. \quad (2.23)$$

В частности, продольную компоненту электрического поля можно записать в виде

$$\vec{E}_{\parallel} = -\frac{\partial}{\partial s} \left( \varphi + \alpha \frac{\partial\beta}{\partial t} \right), \quad (2.24)$$

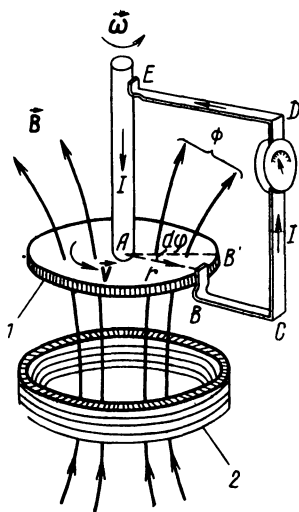
поскольку, согласно равенству (2.22),  $\alpha$  и  $\beta$  постоянны на силовой линии.

### 1.3. Магнитные силовые линии

В предыдущем разделе показано, что магнитное поле может быть описано двумя скалярными функциями  $\alpha$  и  $\beta$ , которые порождают семейство силовых линий, за-

полняющих все пространство. До сих пор, однако, не дано ясного определения, что же следует понимать под движением отдельной силовой линии. Чтобы показать возникающие при этом трудности, рассмотрим простой пример.

Электрический генератор состоит из замкнутой цепи, часть которой составляют проводники, движущиеся поперек магнитного поля. Источником наведенного электрического тока служит электродвижущая сила, которая определяется скоростью движения проводников поперек магнитного поля. Однако понятие магнитных силовых линий и их движения относительно вещества определено неоднозначно. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим [10] униполярный индуктор, приведенный на рис. 2.1. Индуктор состоит из магнитной катушки, создающей аксиально симметричное магнитное поле  $\vec{B}$ , в котором вокруг оси симметрии вращается металлический



диск с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Участок цепи  $BCDE$  обеспечивает электрический контакт между точкой  $B$  на периферии диска и точкой  $E$  на его оси. Такая система работает как простой электрический генератор, который создает ток  $I$  в цепи  $ABCDEA$ .

Генерацию тока в этой установке можно рассматривать по крайней мере двумя способами. Во-первых, можно допустить, что магнитные силовые линии фиксированы в пространстве. Тогда проводник при движении пересекает их только вдоль участка цепи  $AB$ . В этом случае индуцированная электродвижущая сила равна

Рис. 2.1. Униполярный индуктор, состоящий из металлического диска, вращающегося с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ , который присоединен к неподвижной внешней цепи  $BCDE$ :

1 — металлический диск; 2 — катушка, создающая магнитное поле

$$\varphi_{AB} = \oint_{ABCDEA} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_A^B v B dr = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \Phi_{AB}, \quad (2.25)$$

где  $\Phi_{AB}$  — магнитный поток, проходящий через металлический диск.

Во-вторых, можно считать, что все силовые линии движутся вместе с диском с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Тогда участок цепи  $BCDE$  будет пересекать силовые линии и создавать электродвижущую силу, величина которой определяется интегралом вдоль  $BCDE$

$$\Phi_{BA} = - \int_B^A \omega r B dr = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \Phi_{AB} = \varphi_{AB}. \quad (2.26)$$

Результат получается таким же, как и в случае, когда силовые линии считались «покоящимися».

Аналогичный результат получился бы и для цепи, изготовленной из упругого проводника, который за время  $dt = d\varphi/\omega$  может изменить свою форму от  $ABCDEA$  до  $AB'BCDEA$  (см. рис. 2.1). Тогда изменение потока в единицу времени становится равным  $d\Phi/dt = (\omega/2\pi) \cdot \Phi_{AB}$ .

Заметим, наконец, что если бы внешний участок цепи  $BCDE$  был жестко связан с вращающимся диском и его осью и принимал участие во вращении, то в цепи не индуцировалось бы никакого полного тока, а электродвижущая сила равнялась бы нулю. В этом случае изменение соответствующего магнитного потока и интеграл по контуру электрической цепи равны нулю.

Из приведенного примера видно, что определить движение магнитных силовых линий невозможно и вообще в этом нет необходимости; существенным является только изменение магнитного потока, охватываемого данным участком цепи. В то же время картина движущихся силовых линий магнитного поля помогает иногда наглядно представить физические явления, происходящие в замагниченной среде, если, конечно, такое движение понимается не слишком буквально.

Теперь предположим, что в каждой точке пространства одновременно с магнитным полем  $\vec{B}$  задан некоторый вектор скорости  $\vec{V}_f$  (рис. 2.2). Рассмотрим произ-

вольную замкнутую кривую  $C$ , элементы длины которой движутся с локальными скоростями  $\vec{V}_f$ , или, другими словами, контур  $C$  переносится полем скоростей  $\vec{V}_f$ . Допустим также, что элементы  $dS$  поверхности  $S$ , натянутой на этот контур, движутся с той же скоростью  $\vec{V}_f$ . Выделим теперь из всех возможных векторных полей  $\vec{V}_f$  два класса [39].

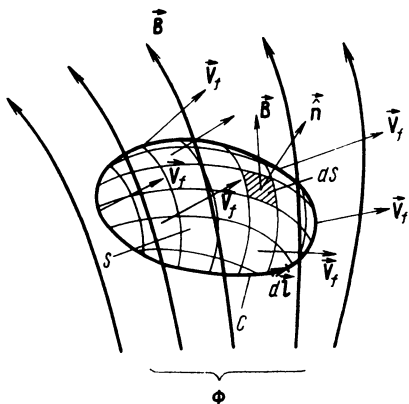


Рис. 2.2. Все точки кривой  $C$  и натянутой на эту кривую поверхности  $S$  переносятся в пространстве с локальными скоростями, совпадающими со значениями поля скоростей  $\vec{V}_f$  в этих точках.  $\Phi$  — поток магнитного поля  $\vec{B}$ , охватываемый кривой  $C$ .

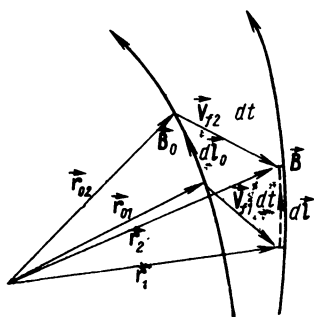


Рис. 2.3. Элемент длины  $dl_0$ , совпадающий по направлению с магнитным полем  $\vec{B}_0$ , переносится полем скоростей  $\vec{V}_f$  в новое положение  $dl$ . Направление элемента совпадает с соответствующим направлением вектора магнитного поля  $\vec{B}$ .

1. Поля  $\vec{V}_f$ , сохраняющие магнитный поток. Для этого класса полей при движении контура  $C$  магнитный поток, охватываемый контуром, не изменяется.

2. Поля  $\vec{V}_f$ , сохраняющие линию. При этом поле скоростей  $\vec{V}_f$  преобразует силовые линии магнитного поля снова в силовые линии. Это определение можно уточ-

нить, если рассмотреть элемент длины  $\vec{dl}_0$ , который в момент времени  $t_0$  находится на некоторой магнитной силовой линии. Тогда сохранение линии означает, что  $\vec{dl}_0$  переносится полем скоростей  $\vec{V}_f$  таким образом, что новое положение  $\vec{dl}$  этого элемента длины в любой последующий момент времени  $t$  также совпадает с некоторой силовой линией (рис. 2.3).

Рассмотрим сохранение потока для случая, изображенного на рис. 2.2. Изменение в единицу времени потока какого-либо вектора  $\vec{B}$ , вызванное движением со скоростью  $\vec{V}_f$  контура  $C$ , охватывающего поверхность  $S$ , можно записать в виде

$$\frac{d\Phi}{dt} = \iint_S \hat{n} \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{V}_f \operatorname{div} \vec{B} + \operatorname{rot}(\vec{B} \times \vec{V}_f) \right] dS. \quad (2.27)$$

Здесь интеграл берется по поверхности  $S$ , а  $\hat{n}$  — единичный вектор положительной нормали к элементу поверхности  $dS$ . Первое слагаемое подынтегрального выражения в уравнении (2.27) описывает изменение напряженности магнитного поля в фиксированной точке пространства. Второе слагаемое обусловлено движением поверхности  $S$ , при котором изменяется число источников векторного поля  $\vec{B}$  внутри данной поверхности. Поскольку  $\vec{B}$  — магнитное поле, то в данном случае  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ , и эта часть вклада в изменение потока исчезает. Последнее слагаемое в подынтегральном выражении обусловлено смещением и деформацией контура  $C$ , вызванными движением со скоростью  $\vec{V}_f$ . Этот вклад может быть связан как с неоднородностью  $\vec{V}_f$ , так и с неоднородностью  $\vec{B}$ .

Подставляя закон электромагнитной индукции (2.1) в выражение (2.27), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} = - \iint_S \hat{n} \cdot \operatorname{rot}(\vec{E} + \vec{V}_f \times \vec{B}) dS = - \oint_C (\vec{E} + \\ + \vec{V}_f \times \vec{B}) d\vec{l}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Условие сохранения потока означает, что для всякого контура  $C$  и любой поверхности  $S$  изменение потока должно равняться нулю. Следовательно, подынтегральное выражение в формуле (2.28) тождественно обращается в нуль. Необходимым и достаточным условием сохранения потока служит поэтому равенство

$$\vec{E} + \vec{V}_f \times \vec{B} = -\vec{\nabla}\chi, \quad (2.29)$$

где  $\chi$  — некоторое скалярное поле.

Теперь найдем условие сохранения линии. Рассмотрим элемент длины  $d\vec{l}_0 = \vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}$ , который в момент времени  $t_0$  находится на силовой линии магнитного поля  $\vec{B}_0$ , как это изображено на рис. 2.3. Через промежуток времени  $dt$  поле скоростей  $\vec{V}_f$  переносит этот элемент длины в новое положение

$$d\vec{l} = \vec{r}_{02} + \vec{V}_{f2}dt - \vec{r}_{01} - \vec{V}_{f1}dt = d\vec{l}_0 + (d\vec{l}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{V}_f dt. \quad (2.30)$$

Наблюдатель, который движется вместе с данным элементом длины, обнаружит изменение напряженности магнитного поля, равное с точностью до величин первого порядка малости

$$\vec{B} - \vec{B}_0 = (\vec{V}_f \cdot \vec{\nabla})\vec{B}_0 dt + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_0 dt. \quad (2.31)$$

Первый член в правой части этого соотношения связан с движением поперек неоднородного магнитного поля. Второй член обусловлен изменением поля в фиксированной точке пространства. Учитывая, что  $\vec{B}_0 \times d\vec{l}_0 = 0$  и пренебрегая членами второго порядка малости, получаем

$$\vec{B} \times d\vec{l} = \vec{B}_0 \times [(d\vec{l}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{V}_f] dt + \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_f \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B}_0 \right] \times d\vec{l}_0 dt. \quad (2.32)$$

Поскольку  $d\vec{l}_0 = d\vec{l}_0 (\vec{B}_0 / B)$ , уравнение (2.32) можно переписать также в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{B} \times d\vec{l} &= d\vec{l}_0 dt \widehat{B}_0 \times \left[ (\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{V}_f - \left( \vec{V}_f \cdot \vec{\nabla} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{B}_0 \right] = \\ &= d\vec{l}_0 dt \widehat{B}_0 \times [\text{rot}(\vec{V}_f \times \vec{B}_0) - \vec{V}_f \text{div} \vec{B}_0 + \vec{B}_0 \text{div} \vec{V}_f + \text{rot} \vec{E}_0], \end{aligned} \quad (2.33)$$

где использованы некоторые хорошо известные векторные тождества и уравнение (2.1). Условие сохранения линии означает, что  $\vec{dl}$  и  $\vec{B}$  всегда должны быть параллельны друг другу, т. е.

$$\vec{B} \times \text{rot}(\vec{E} + \vec{V}_f \times \vec{B}) = 0, \quad (2.34)$$

где опущен индекс нуль. Сравнивая уравнения (2.29) и (2.34), видим, что всякое поле  $\vec{V}_f$ , сохраняющее поток, будет сохранять также и линию. Однако обратное утверждение может оказаться несправедливым.

Чтобы связать полученные результаты с плотностью движущихся силовых линий, покажем, что существует семейство линий  $L_v$ , движущихся со скоростью  $\vec{V}_f$  и имеющих следующие свойства [39]:

1. Через каждую точку пространства проходит не больше одной линии семейства  $L_v$ .

2. При движении линии  $L_v$ , остаются касательными к  $\vec{B}$ .

3. Плотность линий  $L_v$  пропорциональна индукции магнитного поля.

4. Величина электродвижущей силы, индуцированной в замкнутом контуре  $C$ , который произвольно переносится полем скоростей  $\vec{V}_F$ , равна полному числу линий  $L_v$ , пересекающих контур в единицу времени. Эта электродвижущая сила имеет такое направление, что индуцируемый ею ток препятствует изменению магнитного потока, охватываемого контуром  $C$ .

Покажем теперь, что при выполнении этих требований поле скоростей  $\vec{V}_f$  сохраняет поток. Действительно, допустим, утверждения выполняются, и выберем  $\vec{V}_F$  равным  $\vec{V}_f$ . Тогда  $C$  и  $L_v$  будут двигаться с одинаковой скоростью, а число линий  $L_v$  внутри контура  $C$  должно оставаться постоянным, и согласно второму и третьему свойствам, должно быть равно магнитному потоку, охватываемому контуром  $C$ . И наоборот, предположим сначала, что поле  $\vec{V}_f$  сохраняет поток, и рассмотрим семейство линий  $L_v$ , которые совпадают в момент  $t_0$  с магнитными силовыми линиями. Поскольку поле  $\vec{V}_f$



сохраняет поток, то, как было показано при выводе выражения (2.34), оно сохраняет также и линию, и поэтому первое, второе и третье утверждения выполняются. Наконец, в системе координат, движущейся вместе с  $C$ , электрическое поле равно  $\vec{E} + \vec{V}_F \times \vec{B}$ , если под  $\vec{E}$  понимать поле, измеренное в лабораторной системе координат. Поэтому в движущемся контуре  $C$  возникает электродвижущая сила

$$\varphi_C = \oint_C (\vec{E} + \vec{V}_F \times \vec{B}) d\vec{l} = \oint_C (\vec{E} + \vec{V}_f \times \vec{B}) d\vec{l} - \oint_C \vec{B} \times \times [(\vec{V}_F - \vec{V}_f) \times d\vec{l}], \quad (2.35)$$

где первый интеграл в правой части обращается в нуль, поскольку поле  $\vec{V}_f$  сохраняет поток. Второй интеграл имеет такой вид, как этого требуют третье и четвертое утверждения.

Таким образом, все эти утверждения полностью эквивалентны требованию, чтобы поле  $\vec{V}_f$  сохраняло поток. Поэтому можно считать, что магнитные силовые линии переносятся со скоростью  $\vec{V}_f$ .

Заметим, что проведенный анализ теряет силу в точках, где магнитное поле обращается в нуль, и первое условие нарушается. Для нескольких частных случаев движение силовых линий при наличии таких точек исследовал Ньюкомб [40]. При более строгом подходе понятие плотности силовых линий поля основывается на теории меры.

## § 2. 2. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

### 2. 1. Законы сохранения

Рассмотрим частицу с массой  $m$  и зарядом  $q$ , положение которой задано вектором  $\vec{\rho}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ . Пусть частица движется со скоростью  $\vec{w} = d\vec{\rho}/dt$  в силовом поле  $\vec{F}$ , которое является суммой электрического  $\vec{E}$  и гравитационного —  $\vec{\nabla}\varphi_g$  полей. Тогда уравнение движения принимает вид

$$m \frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{F} + q\vec{w} \times \vec{B}, \quad (2.36)$$

где

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(q\varphi + m\varphi_g) - q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = q\vec{E} - m\vec{\nabla}\varphi_g. \quad (2.37)$$

Умножая выражение (2.36) скалярно на  $\vec{\omega}$ , получаем соотношение

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\omega^2 \right) = \vec{F} \cdot \vec{\omega}, \quad (2.38)$$

которое выражает закон сохранения энергии. Поскольку соотношение (2.38) выводилось из выражения (2.36), здесь не содержится какой-либо новой информации по сравнению с законом сохранения импульса. В макроскопической теории, развиваемой в гл. 5, ситуация несколько отличается, поскольку там полная скорость  $\vec{\omega}$  складывается из хаотической скорости теплового движения и направленной средней скорости вещества. Между этими двумя слагаемыми существует дополнительная связь, выражающая закон сохранения энергии.

Сила  $q\vec{\omega} \times \vec{B}$  не совершает над частицей никакой работы. Следовательно, в чисто магнитостатическом поле, где  $\vec{F} = 0$ , энергия  $\frac{1}{2}m\omega^2$  остается постоянной. Согласно выражениям (2.37) и (2.38), изменение энергии в единицу времени равно

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\omega^2 \right) = -\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}(q\varphi + m\varphi_g) - q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{\omega}. \quad (2.39)$$

Первый член в правой части выражения (2.39) связан с изменением потенциальной энергии частицы при ее движении поперек эквипотенциальных поверхностей, задаваемых выражением  $q\varphi + m\varphi_g$ , а второй член описывает бетатронное ускорение за счет электромагнитной индукции.

Уравнение движения во вращающейся системе координат будет рассмотрено в разделе 2.2 гл. 7.

## 2. 2. Законы подобия

Уравнение движений можно записать в безразмерных переменных

$$\left. \begin{aligned} x_k &= L_c \cdot x'_k, \quad t = t_c \cdot t', \quad \vec{A} = A_c \cdot \vec{A}', \\ \varphi &= \varphi_c \cdot \varphi', \quad \varphi_g = \varphi_{gc} \cdot \varphi'_g, \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

где  $x_k$  — пространственные координаты, а величины со штрихами — безразмерные переменные. Коэффициенты с индексами  $c$  представляют собой константы той же размерности, что и величины без штрихов, и могут рассматриваться как характерные значения последних. Вообще, не очень существенно, как выбираются эти значения. Находим уравнение движения

$$m \frac{d\vec{w}}{dt} = -\vec{\nabla}(q\varphi + m\varphi_g) - q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{q}w \times \text{rot} \vec{A}. \quad (2.41)$$

После подстановки соотношений (2.40) уравнение (2.41) принимает вид

$$k_1 \frac{d^2 \vec{p}'}{dt'^2} = -k_2 \vec{\nabla}' \varphi' - k_3 \vec{\nabla}' \varphi'_g - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t'} + \frac{d\vec{p}'}{dt'} \times \text{rot}' \vec{A}' \quad (2.42)$$

с безразмерными параметрами

$$k_1 = \frac{mL_c}{qA_c t_c}, \quad k_2 = \frac{t_c \varphi_c}{A_c L_c}, \quad k_3 = \frac{m t_c \varphi_{gc}}{q A_c L_c}. \quad (2.43)$$

Рассмотрим решение данного уравнения (2.42) для величин со штрихами при соответствующих граничных условиях. Фиксируя все три параметра  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  и изменяя характерные величины с индексом  $c$ , получаем целое множество решений (2.40) уравнения движения (2.41). Эту совокупность решений называют множеством подобных конфигураций. Как нетрудно видеть из соотношений (2.40), для любого решения из такой совокупности величина поля в некоторой точке пространства и времени пропорциональна величине поля для другого решения этого множества в соответствующей точке пространства и времени. В рамках множества подобных конфигураций относительная величина членов в уравнении движения (2.41) также остается постоянной.

В качестве типичного примера рассмотрим изменения в пределах данного множества масштабов длины и времени. В результате такого изменения характерная скорость  $L_c/t_c$  умножается на некоторую величину. Во столько же раз должен измениться характерный потенциал  $A_c$ , а потенциалы  $\varphi_c$  и  $\varphi_{gc}$ , как легко видеть из соотношений (2.43), должны быть помножены на квадрат этой величины. Таким образом, перемножая  $k_1$  и  $k_2$ ,

получаем, что для подобных конфигураций  $\varphi_c \propto A_c^2$ . Этот результат эквивалентен условию, полученному впервые Блоком [41].

Помимо рассмотренных выше применений, преобразование к безразмерным переменным (2.42) и (2.43) можно использовать также для оценки порядка величины различных членов в уравнении движения (2.41). Для этого требуется, однако, более точное определение характерных величин. Отметим, что величины со штрихами не обязаны иметь один и тот же порядок величины.

В законах подобия, рассматриваемых в этой книге, будут приниматься во внимание только те эффекты, которые описываются уравнением движения (2.41). Могут существовать и другие эффекты, как, например, столкновения, которые здесь не исследуются, но играют важную роль в плазме, создаваемой в экспериментальных условиях.

### § 2. 3. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ

Вместо того чтобы пользоваться непосредственно уравнениями движения, можно обратиться к альтернативной формулировке теории, известной под названием гамильтонова формализма. К физической стороне это не добавляет, конечно, ничего нового, но зато дает более мощный теоретический метод.

#### 3. 1. Канонические уравнения

Для частицы, движущейся со скоростью  $\vec{\omega}$ , справедливо следующее векторное тождество:

$$\vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{A}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{\omega} \times \text{rot } \vec{A}. \quad (2.44)$$

Полную производную по времени в системе координат, движущейся вместе с частицей, можно записать в виде

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \right) \cdot \vec{A}. \quad (2.45)$$

При помощи выражений (2.44) и (2.45) уравнение движения (2.41) примет вид

$$m \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\vec{\nabla} (m\varphi_g + q\varphi - q\vec{\omega} \cdot \vec{A}) - q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (2.46)$$

Если ввести лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} m\omega^2 - m\varphi_g - q\varphi + q\vec{\omega} \cdot \vec{A}, \quad (2.47)$$

то легко видеть, что уравнение (2.46) соответствует уравнениям

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0, \quad (2.48)$$

где  $\dot{x}_k = \omega_k$  — производные по времени от координат  $x_k$ . В отсутствие магнитного поля лагранжиан уравнения (2.47) равен разности кинетической и потенциальной энергий частицы. Однако при наличии такого поля не совсем ясно, как следует рассматривать взаимодействие, описываемое членом  $q\vec{\omega} \cdot \vec{A}$ : как кинетическую энергию, поскольку здесь имеется зависимость от  $\vec{\omega}$ , или как потенциальную, поскольку сюда входит внешнее поле  $\vec{A}$ . В дальнейшем увидим, что фактически для развития теории такая классификация не обязательна.

Нередко существуют связи, которые ограничивают движение физической системы. Когда ограничения, накладываемые связями, можно выразить при помощи равенств, включающих только координаты частицы, полезно ввести систему обобщенных координат  $q_k = q_k(t)$ , число которых равно числу степеней свободы системы. Форма функции Лагранжа при этом сохранится прежней (2.47), а уравнения Лагранжа, как легко убедиться, принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \quad (2.49)$$

Уравнения (2.49) тождественны дифференциальным уравнениям, возникающим из вариационной задачи

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (2.50)$$

с фиксированными моментами времени  $t_1$  и  $t_2$ , известной под названием принципа Гамильтона. Лагранжиан яв-

ляется функцией координат  $q_k$ , «скоростей»  $\dot{q}_k$  и времени. Определим обобщенный импульс

$$p_k = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (2.51)$$

и гамильтониан

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t). \quad (2.52)$$

Из определения (2.51) следует, что обобщенный импульс является функцией  $q_j$ ,  $\dot{q}_j$  и  $t$ . И наоборот, это определение позволяет исключить скорости  $\dot{q}_j$ , так что теперь систему можно описывать при помощи величин  $q_k$ ,  $p_k$  и  $t$ , которые следует рассматривать как независимые переменные в канонических уравнениях. Тогда дифференциал  $H$  примет следующий вид:

$$dH = \sum_k \left( p_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) d\dot{q}_k + \sum_k \left( \dot{q}_k dp_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.53)$$

Первый член в правой части этого уравнения, согласно определению (2.51), исчезает. Таким образом можно выразить  $dH$  только через приращения  $p_k$ ,  $q_k$  и  $t$ . Из выражения для  $dL/\partial q_k$ , определяемого равенством (2.49), и из уравнений (2.51) и (2.53) получим

$$dH = \sum_k (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \equiv \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (2.54)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.55)$$

и

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad (2.56)$$

$$\dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad (2.57)$$

где два последних соотношения представляют собой канонические уравнения Гамильтона.

Иногда полезно перейти от одной системы координат к другой. В гамильтоновой формулировке обобщенные импульсы (2.51) являются такими же полноправными независимыми переменными, как и обобщенные координаты. Поэтому в общем случае преобразование от одной системы координат  $(q_k, p_k)$  к другой  $(q'_k, p'_k)$  затрагивает одновременно координаты  $q'_k = q'_k(q_k, p_k, t)$  и импульсы  $p'_k = p'_k(q_k, p_k, t)$ . Особый интерес представляют такие новые переменные, которые приводят к системе уравнений канонического вида (2.56) и (2.57) с новым гамильтонианом  $H' = H'(q'_k, p'_k, t)$  и с соответствующим лагранжианом  $L'$ , связанным с  $H'$  уравнением типа (2.52). Такие преобразования называют каноническими

Если  $q'_k$  и  $p'_k$  — канонические координаты, то они должны удовлетворять принципу Гамильтона точно так же, как и первоначальные координаты  $q_k$  и  $p_k$ . При этом соответствующие лагранжианы  $L'$  и  $L$  отличаются самое большее на полную производную по времени от произвольной функции  $G$ . Поскольку эта функция определяет каноническое преобразование, она должна зависеть как от новых, так и от старых переменных. Благодаря тому что  $q'_k$  и  $p'_k$  — функции  $q_k$  и  $p_k$ , функцию  $G$  всегда можно представить в виде функции  $2n$  из полного набора  $4n$  переменных  $q'_k, p'_k, q_k$  и  $p_k$  (где  $n$  — число степеней свободы).

Одной из четырех возможностей является выбор  $G$  в следующем виде:  $G = G_1(q_k, q'_k, t)$ . Распишем теперь полную производную по времени  $dG_1/dt$  и положим ее равной разности  $L - L'$ , которая выражена при помощи соотношения (2.52). Из условия, что в полученном выражении каждый из коэффициентов при  $q_k$  и  $q'_k$  должен равняться нулю, следует, в частности, что  $\partial G_1 / \partial q'_k = -p'_k$ . В дальнейшем нас будет больше интересовать другая форма  $G$ , которая может быть записана как  $G_2(q_k, p'_k, t) = G_1(q_k, q'_k, t) + \sum p'_k q'_k$ . Подставляя это соотношение в  $dG_1/dt = L - L'$  и приравнявая нулю коэф-

коэффициенты при  $\dot{q}_k$  и  $\dot{p}'_k$ , получаем соответствующие уравнения преобразования

$$p_k = \frac{\partial G_2}{\partial q_k}, q'_k = \frac{\partial G_2}{\partial p'_k}, H' = H + \frac{\partial G_2}{\partial t}. \quad (2.58)$$

Следовательно, преобразование полностью определяется заданием  $G_2$ . Поэтому  $G_2$  называют производящей функцией канонического преобразования. Выбор производящей функции  $G$  тремя другими способами:  $G_1(q_k, q'_k, t)$ ,  $G_3(p_k, p'_k, t)$  или  $G_4(q'_k, p_k, t)$  — приводит к условиям, подобным уравнению (2.58).

### 3. 2. Интегралы движения

Полная производная по времени от произвольной функции  $\chi = \chi(q_k, p_k, t)$  равна

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} &= \frac{\partial \chi}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial \chi}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \chi}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = \frac{\partial \chi}{\partial t} + \\ &+ \sum_k \left( \frac{\partial \chi}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial \chi}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \equiv \frac{\partial \chi}{\partial t} + \{\chi, H\}, \quad (2.59) \end{aligned}$$

где использованы канонические уравнения (2.56) и (2.57). Выражение  $\{\chi, H\}$ , определенное последними двумя членами равенства (2.59), называют скобками Пуассона от  $\chi$  и  $H$ . Если величина  $\chi$  не зависит явно от времени, а скобки Пуассона от  $\chi$  и  $H$  обращаются в нуль, то полная производная от  $\chi$  по времени равна нулю. В этом случае  $\chi$  будет интегралом движения.

Важным частным случаем является отсутствие явной зависимости от времени у гамильтониана. Согласно выражению (2.59), гамильтониан оказывается тогда интегралом движения, и, какие бы канонические переменные  $q_k, p_k$  не использовались для описания системы, всегда  $H(q_k, p_k) = H_0 = \text{const}$ . Следовательно, если произвести каноническое преобразование к новым переменным  $q'_k, p'_k$ , то новый гамильтониан будет равен  $H'(q'_k, p'_k) = H(q_k, p_k) = H_0$ .

В том случае, когда  $\partial H / \partial t = 0$ , можно попытаться найти такое каноническое преобразование, чтобы в но-



вом представлении все импульсы  $p'_k$  оказались бы интегралами движения, т. е.  $\dot{p}'_k = 0$  и  $p'_k \equiv \alpha_k = \text{const}$ . Производящую функцию, использованную ранее, можно тогда записать в виде  $G = W(q_1, q_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ , и соответствующее преобразование (2.58) приводит к виду

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}, \quad q'_k = \frac{\partial W}{\partial x_k}, \quad H\left(q_1, q_2, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots\right) = H_0. \quad (2.60)$$

Последнее из выражений (2.60) является уравнением Гамильтона—Якоби для характеристической функции Гамильтона  $W(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , где  $n$  — число степеней свободы.

Уравнение Гамильтона—Якоби это уравнение в частных производных для  $W$  с числом постоянных интегрирования, равным числу степеней свободы  $n$ . В уравнении содержатся только производные от  $W$ . Поэтому если  $W$  — решение, то  $W + \text{const}$  также должно быть решением данного уравнения. При этом относительно новых импульсов известно только, что они должны быть постоянными. Мы вправе поэтому взять в качестве  $n$  постоянных интегрирования импульсы  $\alpha_k$ . Таким образом, полное решение уравнения Гамильтона—Якоби (2.60) содержит  $n-1$  нетривиальных констант интегрирования  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  и одну величину  $\alpha_1$ , которая является аддитивной постоянной. Для определения этих  $n$  независимых постоянных интегрирования через начальные значения  $q_h$  и  $p_k$  можно воспользоваться первым из соотношений (2.60), взятым в начальный момент времени  $t_0$ . Определенная таким образом константа  $H_0$  является просто комбинацией  $n$  постоянных интегрирования. Не теряя общности, можно выбрать  $p'_1 \equiv \alpha_1 = H_0$ .

Решение  $W$  определено, таким образом, через начальные условия. Пользуясь далее первым из соотношений (2.60), можно выразить импульсы  $p_k$  через  $q_k$ . Наконец каноническое уравнение (2.56) для  $q'_k$  записывается в виде  $\dot{q}'_k = \partial H' / \partial \alpha_k = \partial H_0 / \partial \alpha_k$ , что равно нулю, когда  $k \neq 1$  и равно единице, когда  $k = 1$ . Вместе со вторым из выражений (2.60) это дает соотношение, из которого можно найти зависимость координат от времени. Таким образом, получено полное решение задачи. Преж-

де чем закончить этот раздел, следует сказать несколько слов о связи гамильтониана с полной энергией частицы. В простейшем случае, когда в качестве обобщенных координат можно выбрать прямоугольную систему, соответствующие импульсы, согласно уравнениям (2.47)—(2.51), имеют следующий вид:

$$p_k = m\omega_k + qA_k. \quad (2.61)$$

Из выражения (2.52) получаем тогда следующее выражение для гамильтониана

$$H = \frac{1}{2} m\omega^2 + q\phi + m\phi_g, \quad (2.62)$$

которое равно полной энергии частицы. В частности, если  $\partial H/\partial t=0$ , то гамильтониан равен полной энергии и в то же время является интегралом движения.

Однако в общем случае не зависящий от времени гамильтониан не обязательно должен совпадать с полной энергией. Причина этого состоит в том, что лагранжиан содержит только работу внешних сил, а не работу сил связи. Когда силы связи зависят от времени, они могут совершать работу над частицей. Примером такого рода может служить скользящая по движущейся проволоке бусинка, положение и скорость которой описываются обобщенной координатой, измеряемой длиной дуги вдоль проволоки. В качестве другого примера можно указать движение заряженной частицы в зависящем от времени магнитном поле, когда положение частицы описывается координатами магнитного поля  $s$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , рассмотренными в разделе 1.2. В этом случае движущимися связями служат перемещающиеся в пространстве силовые линии.

### **3. 3. Периодическое и почти периодическое движения**

Для многих областей физики особый интерес представляют системы, в которых движение является периодическим. В системе с одной степенью свободы фазовое пространство представляет собой плоскость, определенную координатами  $q_1$  и  $p_1$ . Существуют два типа периодического движения, а именно: колебание и вращение.

При колебательном движении траектория в фазовом пространстве это замкнутая кривая, а при вращении  $q_1$  может бесконечно возрастать со временем, тогда как  $p_1$  — периодическая функция  $q_1$ .

Из систем с большим числом степеней свободы рассмотрим только такие, для которых проекции их траекторий на каждую плоскость  $(q_k, p_k)$  периодически в том смысле, как это было определено для одной степени свободы. Кроме того, исследуем такие системы, для которых периодические движения в каждой плоскости  $(q_k, p_k)$  являются не зависимыми друг от друга, и, по крайней мере, в одной системе канонических координат уравнение Гамильтона—Якоби допускает разделение переменных. Таким образом, характеристическая функция  $W = W(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  должна делиться на сумму  $n$  членов типа  $W_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Первое из выражений (2.60) показывает тогда, что  $p_k$  — это функция только  $q_k$  и  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Поскольку все импульсы  $p_k$  — периодические функции соответствующих координат  $q_k$ , то можно образовать систему  $n$  величин, определяемых как

$$J_k = \oint p_k dq_k = \oint \frac{\partial W_k}{\partial q_k} dq_k = J_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (2.63)$$

где интегрирование должно выполняться по всему периоду колебания или вращения в каждой из плоскостей  $(q_k, p_k)$ . Определяемые соотношениями (2.63)  $n$  переменных действия  $J_k$  являются функциями только  $n$  постоянных  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Поскольку  $p_k$  — периодическая функция  $q_k$ , то в течение каждого периода фазовая траектория в плоскости  $(q_k, p_k)$  ограничивает одну и ту же площадь поверхности, равную  $J_k$ .

Нередко параметры осциллирующей физической системы претерпевают медленные изменения. Существующее движение системы принято называть почти периодическим. Например, гармонический осциллятор, упругость которого медленно меняется; заряженная частица, которая вращается в магнитном поле, медленно изменяющемся в пространстве и во времени. Переменные действия не будут тогда точными интегралами движения. Однако, если параметры изменяются достаточно медленно, возможно, что отклонения переменных действия от постоянных значений будут малы. Тщательное исследование этого вопроса приводит к проблеме так

называемой адиабатической инвариантности переменных действия. Эту проблему впервые изучали Бургерс [42] и Крутков [43], пытаясь описать механику атома, а позднее она привлекла к себе внимание благодаря развитию физики плазмы. Как показал Борн [44], задачу об адиабатической инвариантности можно сформулировать следующим образом.

1. Пусть дана механическая система, которая в невозмущенном состоянии совершает периодическое движение, как это было определено в начале раздела. Тогда системе соответствует определенное число переменных действия  $J_k$ , которые в невозмущенном состоянии служат интегралами движения.

2. В уравнения движения данной системы вводится дополнительный параметр, который является функцией времени.

3. Тогда адиабатическими называют такие изменения, обусловленные дополнительным параметром, которые происходят бесконечно медленно по сравнению с периодами системы и характерное время которых не соизмеримо с ними. Резонансные явления между периодами системы и изменениями дополнительного параметра исключаются второй частью этого определения.

Доказательства адиабатической инвариантности переменных действия для систем со многими степенями свободы были даны уже в ранних исследованиях Бургерса, Круткова и Борна. Мы, однако, получим выражение для интеграла действия почти периодической системы при помощи метода, введенного Крускалом [45, 46] и развитого позднее Бринкманом [47, 48]. Для этого канонические переменные запишем в виде

$$q_k = q_k [\Theta(t), t], \quad p_k = p_k [\Theta(t), t], \quad (2.64)$$

где  $\Theta$  — периодическая функция времени и явная зависимость от времени, содержащаяся в функциях  $q_k$  и  $p_k$ , приводит к изменениям, которые не находятся в резонансе с периодами системы. Пользуясь определением (2.64), канонические уравнения (2.56) и (2.57) запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{\partial q_k}{\partial \Theta} \dot{\Theta} + \frac{\partial q_k}{\partial t}, \quad (2.65)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial \Theta} \dot{\Theta} + \frac{\partial p_k}{\partial t}, \quad (2.66)$$

где частные производные в правой части соответствуют обозначениям, введенным в уравнениях (2.64). Гамильтониан имеет следующую форму:

$$H = H [q_k(\Theta, t), p_k(\Theta, t), t], \quad (2.67)$$

из которой следует, что

$$\frac{\partial H}{\partial \Theta} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial q_k}{\partial \Theta} + \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial \Theta} \right). \quad (2.68)$$

Комбинируя уравнения (2.56), (2.66) и (2.68), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \Theta} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial p_k}{\partial t} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial \Theta} - \frac{\partial p_k}{\partial t} \cdot \frac{\partial q_k}{\partial \Theta} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( p_k \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( p_k \frac{\partial q_k}{\partial \Theta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Допустим на мгновение, что  $\Theta$  и  $t$  — независимые переменные. Тогда в левой и правой частях выражения (2.69)  $t$  можно считать постоянным всякий раз, когда оно встречается явно, и проинтегрировать период относительно  $\Theta$ . Поскольку при указанных ограничениях как  $H$ , так и  $p_k (\partial q_k / \partial t)$  через промежуток времени, равный одному периоду, возвращаются к первоначальным значениям, то эти величины не вносят в интеграл никакого вклада. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^n \oint \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( p_k \frac{\partial q_k}{\partial \Theta} \right) d\Theta \right]_t = 0, \quad (2.70)$$

где индекс  $t$  означает, что всякий раз, когда время входит явно [в смысле уравнения (2.64)], оно должно считаться постоянным. Поскольку  $\Theta$  и  $t$  рассматриваются как независимые переменные, то в уравнении (2.70) можно поменять порядок интегрирования и дифференцирования и получить

$$J^* = \sum_{k=1}^n J_k^* = \text{const}, \quad J_k^* = \oint \left[ p_k \frac{\partial q_k}{\partial \Theta} \right]_t d\Theta, \quad (2.71)$$

т. е. интеграл действия  $J^*$  не зависит явно от времени. Этот результат чисто формальный и справедлив только до тех пор, пока можно ввести указанным выше способом переменную  $\Theta$ . Физически его можно обосновать только в том случае, когда движение частицы разделяется на быстро осциллирующую периодическую часть и медленно меняющуюся аperiodическую. Тогда интеграл (2.71) означает усреднение по осцилляциям, в то время как медленно меняющаяся часть считается постоянной.

Для системы с одной степенью свободы  $J^* = J_1^*$ . Когда в соотношении (2.64) явная зависимость от времени оказывается бесконечно медленной, разность между  $J_1^*$  и переменной действия  $J_1$ , определяемой равенством (2.63), стремится к нулю.

Для системы со многими степенями свободы из соотношения (2.71) еще не следует, что каждый член  $J_k^*$  должен сохранять постоянное значение. Однако иногда движение в каждой плоскости  $(q_k, p_k)$  можно рассматривать как независимые и гамильтониан (2.67) представить в виде суммы соответствующих членов. Каждая степень свободы рассматривается как одномерная система, и анализ уравнений (2.68) — (2.71) справедлив для любого отдельно взятого значения  $k$ . Тогда  $J_k^*$  оказываются постоянными и при бесконечно медленной зависимости от времени  $J_k^*$  стремится к  $J_k$ .

## § 2. 4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Точное решение уравнений движения можно получить только в нескольких частных случаях. В настоящем параграфе приведем примеры, которые в какой-то степени пояснят содержание последующих глав.

### 4.1. Однородные магнитостатическое и электрическое поля

Рассмотрим частицу, движущуюся в однородном магнитостатическом поле  $\vec{B}$  и зависящем от времени однородном электрическом поле  $\vec{E}$ . Допустим, что эф-

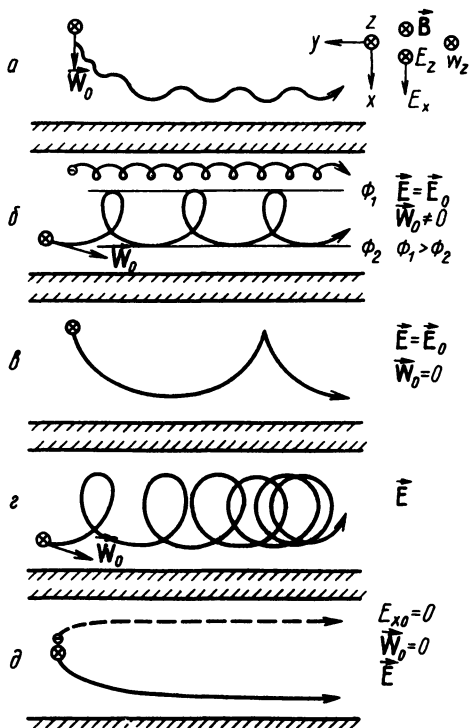


Рис. 2.4. Траектории заряженных частиц в однородном магнитостатическом поле  $\vec{B}$  и однородном, зависящем от времени электрическом поле  $\vec{E}(t)$ :

*a* — определение системы координат; *б* — постоянное электрическое поле  $\vec{E}_0$ . Электрический дрейф одинаков для частиц любого заряда; *в* — постоянное электрическое поле, начальная скорость  $\vec{W}_0$  равна нулю; *г* — медленно убывающее со временем электрическое поле. Скорость изменения дрейфа в электрическом поле изображена в сильно преувеличенном масштабе; *д* — электрическое поле медленно нарастает от начального значения, равного нулю. Начальная скорость частицы также равна нулю. Смещение вдоль оси  $x$  сильно преувеличено.

фектами индукции, связанными с зависимостью  $\vec{E}$  от времени, можно пренебречь. Введем прямоугольную систему координат (рис. 2.4). Направим ось  $z$  вдоль магнитного поля  $\vec{B}$ , а вектор электрического поля  $\vec{E} = [E_x(t), 0, E_z(t)]$  расположим в плоскости  $xz$ . Тогда уравнение движения (2.36) запишем в виде

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \omega_g \omega_y + \frac{\omega_g E_x}{B}, \quad (2.72)$$

$$\frac{d\omega_y}{dt} = -\omega_g \omega_x, \quad (2.73)$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{qE_z}{m}, \quad (2.74)$$

где  $\omega_g = qB/m$ , как будет видно из дальнейшего, — частота вращения частицы в магнитном поле. Движение вдоль магнитного поля, которое, согласно выражению (2.74), происходит с ускорением, зависящим от времени, не влияет на движение в плоскости  $xy$  и поэтому не рассматривается в дальнейшем.

Для поперечного движения подставим  $\omega_x$  из выражения (2.73) в формулу (2.72) и получим

$$\frac{d^2\omega_y}{dt^2} + \omega_g^2 \omega_y = -\omega_g^2 \frac{E_x}{B}. \quad (2.75)$$

Зададим начальные условия в момент  $t=0$   $\omega_y(0) = \omega_{y0}$ ,  $\omega_x(0) = \omega_{x0}$ ,  $E_x(0) = E_{x0}$ . Полное решение уравнения (2.75) — это сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения уравнения с правой частью. При выбранных начальных условиях находим общее решение

$$\begin{aligned} \omega_y = & \omega_{y0} \cos \omega_g t - \omega_{x0} \sin \omega_g t + \frac{\omega_g}{B} \cos \omega_g t \int_0^t E_x \sin \omega_g t dt - \\ & - \frac{\omega_g}{B} \sin \omega_g t \int_0^t E_x \cos \omega_g t dt, \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\omega_x = \omega_{x0} \cos \omega_g t + \omega_{y0} \sin \omega_g t + \frac{\omega_g}{B} \sin \omega_g t \int_0^t E_x \sin \omega_g t dt +$$



$$+ \frac{\omega_g}{B} \cos \omega_g t \int_0^t E_x \cos \omega_g t dt. \quad (2.77)$$

Интегрируя по частям выражения для  $\omega_y$  и  $\omega_x$  один и два раза соответственно, получаем следующие выражения [49]:

$$\omega_y = \omega_{y0} \cos \omega_g t - \omega_{x0} \sin \omega_g t + \frac{E_{x0}}{B} \cos \omega_g t - \frac{E_x}{B} + \\ + \frac{1}{B} \cos \omega_g t \int_0^t \frac{dE_x}{dt} \cos \omega_g t dt + \frac{1}{B} \sin \omega_g t \int_0^t \frac{dE_x}{dt} \sin \omega_g t dt \quad (2.78)$$

и

$$\omega_x = \omega_{x0} \cos \omega_g t + \omega_{y0} \sin \omega_g t + \frac{E_{x0}}{B} \sin \omega_g t + \\ + \frac{1}{\omega_g B} \frac{dE_x}{dt} - \frac{1}{\omega_g B} \left( \frac{dE_x}{dt} \right)_0 \cos \omega_g t - \frac{1}{\omega_g B} \times \\ \times \cos \omega_g t \int_0^t \frac{d^2 E_x}{dt^2} \cos \omega_g t dt - \frac{1}{\omega_g B} \sin \omega_g t \int_0^t \frac{d^2 E_x}{dt^2} \sin \omega_g t dt, \quad (2.79)$$

где индекс 0 относится к начальным значениям.

Впервые качественное рассмотрение траекторий частиц в зависящем от времени поперечном электрическом поле было проведено в работах [50, 51]. Используем теперь уравнения (2.78) и (2.79) для изучения следующих частных случаев.

1.  $\vec{E}=0$ . Проекция траекторий частицы на плоскость  $xy$  представляет собой окружность, вдоль которой частица движется с постоянной скоростью  $W_0 = (\omega_{x0}^2 + \omega_{y0}^2)^{1/2}$ . В начальный момент времени скорость равна  $\vec{W}_0$ . Интегрирование уравнений (2.78) и (2.79) показывает, что положение частицы можно описать при помощи вектора

$$\vec{a} = \frac{2}{\omega_g} \hat{B} \times \vec{W}_0 \cos \omega_g t + \frac{1}{\omega_g} \vec{W}_0 \sin \omega_g t, \quad \vec{W}_0 = (\omega_{x0}, \omega_{y0}, 0), \quad (2.80)$$

начало которого находится в центре вращения (или в ведущем центре). Здесь  $\widehat{B} = \vec{B}/B$  означает единичный вектор вдоль  $\vec{B}$ , а знак  $\omega_g$  определяется знаком заряда частицы  $q$ . Назовем модуль вектора  $\vec{a}$  радиусом вращения (или ларморовским радиусом)

$$a = \frac{W_0}{|\omega_g|} = \frac{mW_0}{|q| \cdot B}. \quad (2.81)$$

При фиксированной скорости  $W_0$  радиус вращения оказывается обратно пропорциональным  $B$ . Изменение вектора  $\vec{a}$  соответствует скорости вращения

$$\vec{W} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \omega_g \vec{a} \times \widehat{B}. \quad (2.82)$$

Движение частицы вокруг силовых линий магнитного поля можно представить как циркулирующий электрический ток, эквивалентный магнитный момент которого равен

$$\vec{M} = -\frac{1}{2} m\vec{B} \left(\frac{W_0}{B}\right)^2. \quad (2.83)$$

Заметим, что для любого знака заряда  $q$  этот момент антипараллелен  $\vec{B}$ . Другими словами, движение частиц индуцирует магнитное поле, направление которого противоположно внешнему полю в центре вращения частицы. Газ заряженных частиц имеет, таким образом, диамагнитные свойства.

Поскольку  $E_z = 0$ , движение вдоль  $\vec{B}$  происходит с постоянной скоростью, и результирующая траектория частицы представляет собой спираль с постоянным шагом, определяемым, как это видно из рис. 2.5, отношением  $\omega_z/W$ .

2.  $\vec{E} = \vec{E}_0 = \text{const}$ . В этом случае в правой части выражения (2.78) сохраняются только первые четыре члена, а в уравнении (2.79) — первые три. После подстановки

$$\omega'_y = \omega_y + \frac{E_{x0}}{B}, \quad \omega'_{y0} = \omega_{y0} + \frac{E_{x0}}{B} \quad (2.84)$$

уравнения (2.78) и (2.79) вновь принимают вид, который рассматривался уже при  $\vec{E}=0$ . Таким образом, движение частицы состоит из вращения со скоростью  $\vec{W}$ , на которое накладывается дрейф со скоростью  $\vec{E}_0 \times \vec{B}/B^2$ . Это также следует из уравнения движения (2.36), в котором поперечное электрическое поле исчезает, если движение частицы рассматривать в системе координат, движущейся со скоростью  $\vec{E}_0 \times \vec{B}/B^2$ .

Проекция траектории частицы на плоскость  $xy$  изображена на рис. 2.4, б. Когда продольное электрическое поле  $E_z$  равно нулю, частица дрейфует в направлении  $y$  в пространстве между двумя эквипотенциальными поверхностями  $\varphi=\varphi_1$  и  $\varphi=\varphi_2$ . Происхождение дрейфового движения частицы становится понятным, поскольку поперечная скорость увеличивается, когда частица «падает» от  $\varphi=\varphi_1$  до  $\varphi=\varphi_2$ . Мгновенный радиус вращения при  $\varphi_1$  значительно меньше, чем при  $\varphi_2$ . Заметим, что электрический дрейф не зависит от знака заряда частицы. В частном случае, когда начальные скорости  $w_{x0}$  и  $w_{y0}$  равны нулю, траектория частицы представляет собой циклоиду (см. рис. 2.4, в).

**3. Периодическое электрическое поле  $\vec{E}$ .** Для поперечного поля

$$E_x = E_{x0} \cos \omega t, \quad (2.85)$$

осциллирующего с частотой  $\omega$ , уравнения (2.76) и (2.77) легко интегрируются. После выполнения некоторых тригонометрических преобразований находим

$$w_y = w_{y0} \cos \omega_g t - w_{x0} \sin \omega_g t + \frac{\omega_g E_{x0}}{B(\omega + \omega_g)} \sin \left[ \frac{1}{2} (\omega +$$

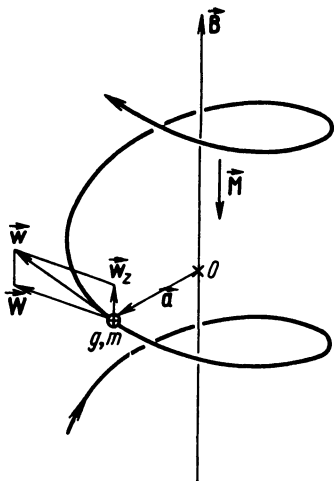


Рис. 2.5. Движение заряженной частицы в однородном магнитостатическом поле  $\vec{B}$ .

$$\begin{aligned}
 & + \omega_g) t \left] \sin \left[ \frac{1}{2} (\omega - \omega_g) t \right] - \frac{\omega_g E_{x0}}{B (\omega - \omega_g)} \times \right. \\
 & \left. \times \sin \left[ \frac{1}{2} (\omega + \omega_g) t \right] \sin \left[ \frac{1}{2} (\omega - \omega_g) t \right] \right. \quad (2.86)
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 \omega_x = & \omega_{x0} \cos \omega_g t + \omega_{y0} \sin \omega_g t + \frac{E_{x0}}{2B} \sin \omega_g t - \\
 & - \frac{E_{x0} (\omega - \omega_g)}{2B (\omega + \omega_g)} \sin \left[ \frac{1}{2} (\omega + \omega_g) t \right] \cos \left[ \frac{1}{2} (\omega - \omega_g) t \right] + \\
 & + \frac{E_{x0} (\omega + \omega_g)}{2 (\omega - \omega_g)} \cos \left[ \frac{1}{2} (\omega + \omega_g) t \right] \sin \left[ \frac{1}{2} (\omega - \omega_g) t \right]. \quad (2.87)
 \end{aligned}$$

Особый интерес представляет случай циклотронного резонанса, когда  $\omega = \omega_g$  и уравнения (2.86) и (2.87) сводятся к следующим:

$$\omega_y = \omega_{y0} \cos \omega_g t - \omega_{x0} \sin \omega_g t - \frac{E_{x0}}{2B} \omega_g t \sin \omega_g t \quad (2.88)$$

и

$$\begin{aligned}
 \omega_x = & \omega_{x0} \cos \omega_g t + \omega_{y0} \sin \omega_g t + \frac{E_{x0}}{2B} (\sin \omega_g t + \\
 & + \omega_g t \cos \omega_g t). \quad (2.89)
 \end{aligned}$$

Для достаточно больших промежутков времени основное значение имеют последние члены этих выражений, и для поперечной кинетической энергии частицы можно приблизительно написать

$$\frac{1}{2} m (\omega_x^2 + \omega_y^2) \approx \frac{(qE_{x0}t)^2}{8m}. \quad (2.90)$$

Таким образом, согласно настоящей теории, частица может приобрести сколь угодно большую энергию, если только поле  $E_x$  настроено в резонанс с гирочастотой частицы. В действительности увеличение энергии ограничивается потерями при соударениях с другими частицами и излучением. Дальнейшее обсуждение механизмов, которые могут быть использованы для увеличения энергии ионизованного газа, будет дано в § 6.2.

**4. Медленно меняющееся электрическое поле  $\vec{E}$ .**  
 Когда поперечное электрическое поле изменяется мед-

ленно по сравнению с гирочастотой, т. е. когда  $|(dE_x/dt)/(\omega_g E_x)| \ll 1$ , интегралы в уравнениях (2.78) и (2.79) дают сравнительно малый вклад, и ими можно пренебречь. В этом легко убедиться, если разложить  $E_x(t)$  в ряд по  $t$ . Подстановка выражения (2.84) в уравнения (2.78) и (2.79) показывает, что в рассматриваемом приближении движение состоит из вращения со скоростью  $\vec{W}$ , которое накладывается на движение с дрейфовой скоростью  $\vec{E} \times \vec{B}/B^2$ , медленно изменяющейся во времени.

На рис. 2.4, *г* изображена схема траектории частицы в медленно убывающем поле  $E_x$ . Скорость изменения электрического дрейфа  $\vec{E} \times \vec{B}/B^2$  показана в сильно увеличенном масштабе, а малые смещения в направлении оси  $x$  не показаны.

Для частного случая, когда в начальный момент времени частица находится в покое, а поле  $E_x$  медленно и монотонно нарастает от исходной величины  $E_{x0}=0$ , траектории ионов и электронов имеют вид, подобный изображенному на рис. 2.4, *а*. Однако на этом рисунке сильно преувеличены смещения в направлении оси  $x$ . Заметим, что для ионов и электронов эти смещения направлены в противоположные стороны. В ионизованном газе это приводит к появлению электрической поляризации.

#### **4. 2. Магнитоэлектростатическое поле с аксиальной симметрией**

Для описания движения заряженной частицы в статическом аксиально симметричном магнитном поле введем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ . При этом магнитное поле имеет вид

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \left( -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi) \right). \quad (2.91)$$

Скорость частицы обозначим  $\vec{w} = (\dot{r}, r\dot{\varphi}, \dot{z})$ , где точка указывает, что берется полная производная по времени.

В отсутствие электрического и гравитационного полей из закона сохранения энергии следует

$$\omega_r^2 + \omega_\varphi^2 + \omega_z^2 = \omega_0^2. \quad (2.92)$$

Поскольку  $A_\varphi$  не зависит явно от времени, азимутальная компонента уравнения движения (2.36) приводит к соотношению

$$\frac{m}{q} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = -r \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \cdot \dot{z} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \dot{r} = -\frac{d}{dt} (r A_\varphi). \quad (2.93)$$

Интегрирование этого выражения дает

$$p_\varphi \equiv m r \omega_\varphi + q r A_\varphi = m r_0 \omega_{\varphi 0} + q r_0 A_{\varphi 0} = p_{\varphi 0}, \quad (2.94)$$

где индекс нуль относится к значениям, взятым в начальный момент времени. Соотношения (2.92) и (2.93)

можно также получить при помощи гамильтонова формализма, рассмотренного в разделе 3.2. Уравнение (2.94) выражает закон сохранения обобщенного углового момента  $p_\varphi$ .

Применим эти результаты к следующим частным случаям.

1. *Поле монополя.* Магнитное поле, силовые линии которого расположены так же, как это показано на рис. 2.6, аналитически описывается формулой

$$\vec{B} = B_0 l_0^2 (r^2 + z^2)^{-3/2} \cdot (r, 0, z), \quad (2.95)$$

где  $B_0$  и  $l_0$  — постоянные величины. Здесь не будет обсуждаться сингулярная точка  $r=0$ , в которой сходятся силовые линии. Векторный потенциал имеет только одну компоненту в  $\varphi$ -направлении, и, как

легко видеть из уравнений (2.91) и (2.95), его можно записать в виде

$$r A_\varphi = B_0 l_0^2 [1 - z(r^2 + z^2)^{1/2}]. \quad (2.96)$$

Впервые движение частицы в таком поле изучал Пуанкаре [52]. Он обнаружил, что частица движется вдоль геодезической кривой.

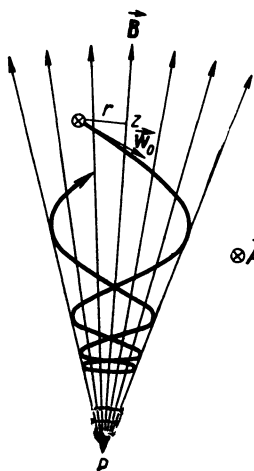


Рис. 2.6. Траектория частицы в поле монополя.

Радиальная и аксиальная компоненты уравнения движения (2.36) имеют вид

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 + qr\dot{\varphi}B_r, \quad (2.97)$$

$$m\ddot{z} = -qr\dot{\varphi}B_z. \quad (2.98)$$

Комбинируя их с уравнениями (2.94), (2.95) и (2.96), получаем

$$m\ddot{r} = \frac{1}{mr} \left\{ p_{\varphi 0} - qB_0 l_0^2 \left[ 1 - \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right] \right\} \times \\ \times \left\{ r^{-2} \left[ p_{\varphi 0} - qB_0 l_0^2 \left[ 1 - \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right] \right] + \frac{qB_0 l_0^2 z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right\}, \quad (2.99)$$

$$m\ddot{z} = -qB_0 l_0^2 r \left\{ p_{\varphi 0} - qB_0 l_0^2 \left[ 1 - \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right] \right\} / mr (r^2 + z^2)^{3/2}. \quad (2.100)$$

Легко убедиться непосредственной подстановкой, что

$$z = k_0 r, \quad rA_\varphi = r_0 A_{\varphi 0}, \quad r\omega_\varphi = r_0 \omega_{\varphi 0} \quad (2.101)$$

удовлетворяют уравнениям (2.99) и (2.100), если только постоянная  $k_0$  выбрана так, что выполняется соотношение

$$k_0 (1 + k_0^2)^{1/2} = - \frac{qB_0 l_0^2}{mr_0 \omega_{\varphi 0}}. \quad (2.102)$$

Таким образом, частица движется по конической поверхности, определяемой уравнениями (2.101). Окончательное уравнение для  $r$  принимает следующий вид

$$r^3 \ddot{r} = \frac{r_0^2 \omega_{\varphi 0}^2}{1 + k_0^2} \equiv c_0 > 0. \quad (2.103)$$

Соотношения (2.102) и (2.103) можно непосредственно вывести, приравняв компоненты центробежной силы  $m\omega_{\varphi 0}^2 / r$  сумме всех других сил, действующих как вдоль, так и поперек  $\vec{B}$ . Как известно [53], общее решение уравнения (2.103)

$$c_1 r^2 = -c_0 - (c_1 t - c_2)^2 \quad \text{и} \quad r^2 = 2t (-c_0)^{1/2} + c^3, \quad (2.104)$$

где  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  — постоянные интегрирования. Действительное решение, которое удовлетворяет начальным условиям, получаем из первого выражения (2.104)

$$r^2 = \frac{r_0^2 \left\{ c_0 + \left[ \frac{(c_0 + r_0^2 \omega_{\varphi 0}^2) t}{r_0^2} + r_0 \omega_{\varphi 0} \right]^2 \right\}}{c_0 + r_0^2 \omega_{\varphi 0}^2}. \quad (2.105)$$

Подставляя  $c_0$  из выражения (2.103), получаем, что частица может подойти к оси симметрии системы не ближе, чем на минимальное расстояние

$$r_{\text{мин}} = \frac{r_0 |\omega_{\varphi 0}|}{\omega_0}. \quad (2.106)$$

Траектория частицы для этого случая приведена на рис. 2.6. По мере того как частица приближается к области сильного поля вблизи магнитного полюса  $P$ , она постепенно останавливается, а затем отражается. Это одно из проявлений эффекта магнитного «зеркала» — явления, которое будет рассмотрено в разделах 2.1 гл. 6 и 3.1 гл. 7.

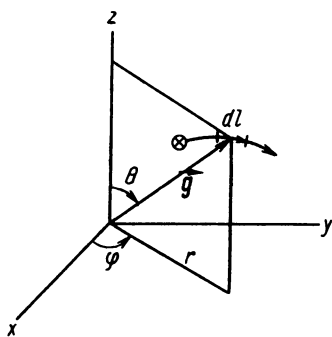


Рис. 2.7. Координаты, используемые для описания движения частицы.

В поле монополя частица все время движется на одной и той же трубке тока  $rA_{\varphi} = r_0 A_{\varphi 0}$ . Это свойство только данного магнитного поля (2.95), и оно несправедливо в общем случае.

2. Поле диполя. Траектории заряженных частиц в поле магнитного диполя представляют особый интерес для изучения космических лучей и полярных сияний. Эта тема подробно освещена в обзорах [54—56]. В дальнейшем будет дано только краткое описание запрещенных областей.

Выберем систему координат  $(r, \varphi, z)$  так (рис. 2.7), чтобы магнитный диполь с моментом  $\vec{M}_p$  находился в



начале отсчета, а вектор  $\vec{M}_p$  был направлен вдоль оси  $z$ . Тогда векторный потенциал можно записать в виде

$$\vec{A} = 0, \quad \frac{\mu_0 M_p r}{4\pi\rho^3}, \quad 0. \quad (2.107)$$

Поскольку, согласно выражению (2.92), модуль  $\vec{\omega}$  полной скорости  $\vec{\omega}$  есть величина постоянная, в качестве независимой переменной вместо времени можно использовать длину дуги  $l = \omega t$  вдоль пути частицы. Тогда закон сохранения момента (2.94) можно представить в виде

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d\varphi}{dt} + \frac{q}{|q|} \frac{c_{st}^2 r^2}{\rho^3} &= \frac{p_{\varphi 0}}{m\omega_0} = \\ &= \frac{r_0 \omega_{\varphi 0}}{\omega_0} + \frac{q}{|q|} \frac{r_0^2 c_{st}^2}{\rho_0^3}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

где

$$c_{st} = (\mu_0 |q| M_p / 4\pi m \omega_0)^{1/2} \quad (2.109)$$

имеет размерность длины и называется единицей Штермера. Магнитное поле входит только в  $c_{st}$ . На бесконечности угловой момент  $m(r\omega_{\varphi})_{\infty}$  частицы становится равным  $p_{\varphi 0}$ , поскольку  $rA_{\varphi}$  обращается в нуль, когда  $r \rightarrow \infty$ . Уравнения не изменятся, если одновременно поменять на обратные знаки у  $q$  и  $\varphi$ . Поэтому ограничимся рассмотрением случая  $q > 0$ .

Преобразуем сначала все координаты с размерностью длины к безразмерным переменным  $r' = r/c_{st}$ ,  $\rho' = \rho/c_{st}$  и  $l' = l/c_{st}$ . Тогда выражение (2.108) примет следующий вид:

$$r'^2 \frac{d\varphi}{dl'} + \frac{r'^2}{\rho'^3} = \frac{r'_0 \omega_{\varphi 0}}{\omega_0} + \frac{r'_0{}^2}{\rho'_0{}^3} \equiv 2\gamma'. \quad (2.110)$$

Полученное уравнение не содержит физических постоянных  $M_p$ ,  $m$ ,  $q$  и  $\omega_0$ . Таким образом, его вполне достаточно для определения траекторий частиц, задаваемых этим соотношением. Простым изменением масштаба  $r$ ,  $\rho$  и  $l$

можно получить любые другие траектории. Единица Штермера связана с характерным параметром  $k_1$  уравнения (2.43). Для данного решения  $(r', \rho')$  линейные размеры  $(r, \rho)$  траектории убывают при увеличении  $c_{st}$ . Этого следовало ожидать, поскольку при увеличении радиуса вращения величина  $c_{st}$  уменьшается.

Из выражения (2.110) можно получить области, в которые не может попасть частица. Введем на рис. 2.7 угол  $\theta$ , определяемый из соотношения  $\cos \theta = r'/\rho'$ .

Тогда

$$\rho' \cos \theta \frac{\omega_\varphi}{\omega} + \frac{r \cos^2 \theta}{\rho'} = 2\gamma'. \quad (2.111)$$

Поскольку  $|\omega_\varphi/\omega| \leq 1$ , отсюда можно получить условие, что частица, вышедшая из точки  $(r'_0, \varphi'_0, \rho'_0)$  с данной начальной скоростью, достигнет точки  $(r', \varphi', \rho')$

$$\left| \frac{2\gamma'}{\rho' \cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\rho'^2} \right| \leq 1. \quad (2.112)$$

Частица не достигнет точек, для которых неравенство (2.112) не выполняется. Такие точки образуют запрещенные области. Многочисленные примеры, иллюстрирующие этот результат, приведены в работе Штермера [56]. Мы продолжим изучение запрещенных областей в § 7.2.

Траектории частиц в поле магнитного диполя были исследованы в модельных экспериментах [57, 58]. Результаты численных расчетов таких траекторий приведены в работе [55].

*3. Поле линейного тока.* Впервые движение частицы в магнитном поле, создаваемом линейным током  $I$ , исследовал Хертвек [59]. В этом случае векторный потенциал имеет вид

$$\vec{A} = \left( 0, 0, A_0 \lg \frac{r}{r_1} \right), \quad A_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}, \quad (2.113)$$

где  $r_1$  — произвольная постоянная, которая не влияет на вид соответствующего магнитного поля  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ . Компо-

ненту уравнения движения (2.36) вдоль оси  $z$  можно записать в виде

$$m\ddot{z} = q\dot{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{qr\dot{A}_0}{r} \quad (2.114)$$

и

$$\dot{z} = \omega_{z0} + \frac{q}{m} A_0 \lg \frac{r}{r_0} \equiv \frac{q}{m} A_0 \lg \frac{r}{r_2}, \quad (2.115)$$

где  $r_0$  — исходная точка движения частицы. Этот результат следует также из уравнений (2.51) и (2.59). Комбинируя далее закон сохранения (2.94) с уравнением (2.115), получаем

$$\dot{r}^2 = \omega_0^2 - \frac{r_0^2 \omega_{\varphi 0}}{r^2} - \left( \frac{qA_0}{m} \right)^2 \lg^2 \frac{r}{r_2}. \quad (2.116)$$

Этот результат можно использовать для определения запрещенных областей, граница которых получается приравниванием  $\dot{r}$  нулю. Существуют два решения:  $r = r_{\text{мин}}$  и  $r = r_{\text{макс}}$ . Следовательно, частица будет двигаться в пространстве между двумя цилиндрами, радиусы которых равны  $r_{\text{мин}}$  и  $r_{\text{макс}}$  (см. также раздел 2.1 гл. 7). Время, необходимое частице для того, чтобы пройти расстояние от  $r_{\text{мин}}$  до  $r_{\text{макс}}$  и обратно к  $r_{\text{мин}}$ , можно определить из уравнения (2.116), используя симметрию задачи

$$\Delta t = 2 \int_{r_{\text{мин}}}^{r_{\text{макс}}} \left[ \omega_0^2 - \frac{r_0^2 \omega_{\varphi 0}}{r^2} - \left( \frac{qA_0}{m} \right)^2 \lg^2 \left( \frac{r}{r_2} \right) \right]^{-1/2} dr. \quad (2.117)$$

Используя выражения (2.115) и (2.116), нетрудно вычислить, что за тот же промежуток времени частица пройдет вдоль оси  $z$  расстояние

$$\Delta z = 2 \int_{r_{\text{мин}}}^{r_{\text{макс}}} \frac{qA_0}{m} \lg \left( \frac{r}{r_2} \right) \left[ \omega_0^2 - \frac{r_0^2 \omega_{\varphi 0}}{r^2} - \left( \frac{qA_0}{m} \right)^2 \lg^2 \frac{r}{r_2} \right]^{-1/2} dr. \quad (2.118)$$

Полученные результаты представляют особый интерес, так как они позволяют точно определить среднюю дрейфовую скорость  $\overline{\omega}_z = \Delta z / \Delta t$  в направлении оси  $z$ . Их можно использовать для проверки правильности выражений, полученных приближенными методами в § 1 гл. 3, которые определяют скорость дрейфа в неоднородном магнитном поле. Такая проверка была проведена Хертвеком, который показал, что для малых значений отношения  $a/r$  ( $a$  — радиус вращения,  $r$  — характерный размер изменения магнитного поля  $|B_\varphi / (dB_\varphi / dr)| = r$ ) относительная ошибка при вычислении дрейфовой скорости  $\overline{\omega}$  приближенным методом очень мала.

### 4. 3. Гиперболическое магнитное поле

Астрем [60] первый рассмотрел для релятивистского случая траектории частиц в гиперболическом магнито-статическом поле, ход силовых линий которого показан на рис. 2.8. Здесь приведены только некоторые его результаты для нерелятивистской частицы.

Магнитное поле определяется соотношением

$$\vec{B} = 2 \left( \frac{m}{q} \right) c_0 (y, x, 0), \quad (2.119)$$

где выбрана прямоугольная система координат, а  $c_0/q$  — положительная постоянная величина. При этом получим уравнение движения

$$\dot{\vec{\omega}} = 2c_0 (-x\omega_z, y\omega_x, x\omega_x - y\omega_y). \quad (2.120)$$

Благодаря симметрии относительно оси  $z$ , компонента уравнения движения вдоль этой оси легко интегрируется

$$\omega_z = c_0 (x^2 - y^2) - c_1, \quad c_1 = c_0 (x_0^2 - y_0^2) - \omega_{z0}. \quad (2.121)$$

Поскольку, согласно уравнению (2.119),

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \omega_z = 2c_0 \vec{B}(x, -y, 0) = 0, \quad (2.122)$$

$\omega_z$  на силовой линии магнитного поля постоянна. Из закона сохранения энергии следует  $\omega^2 = \omega_0^2$ , что вместе с условием (2.121) приводит к следующему результату

$$0 \leq \omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega_0^2 - \omega_z^2 = [\omega_0 - c_0(x^2 - y^2) + c_1] \times \\ \times [\omega_0 + c_0(x^2 - y^2) - c_1], \quad (2.123)$$

который можно использовать для определения запрещенных областей. Граница между разрешенными и запрещенными областями задается двумя гиперболами

$$x^2 - y^2 = \frac{c_1 \pm \omega_0}{c_0}. \quad (2.124)$$

Ограничимся движением, которое происходит только в плоскости  $y=0$ , так что  $\omega_y=0$ . В тех точках, где  $\omega_x$  также обращается в нуль,

$$x = \pm \frac{\sqrt{c_1 \pm \omega_0}}{\sqrt{c_0}}, \quad (2.125)$$

и четыре знака следует выбирать независимо друг от друга. Согласно условию (2.125) имеется три возможности. Рассмотрим положительные значения  $q$ .

### 1. Четыре действительных корня.

В этом случае  $|c_1| > \omega_0$  и  $c_1 > 0$ . Введем параметры

$$c_2 = \sqrt{\frac{2\omega_0}{\omega_0 + c_1}}, \quad c_3^2 = 1 - c_2^2 \quad (2.126)$$

и новые безразмерные переменные

$$x' = c_2 \left( \frac{c_0}{2\omega_0} \right)^{1/2} x, \quad t' = \frac{(2c_0\omega_0)^{1/2} t}{c_2}. \quad (2.127)$$

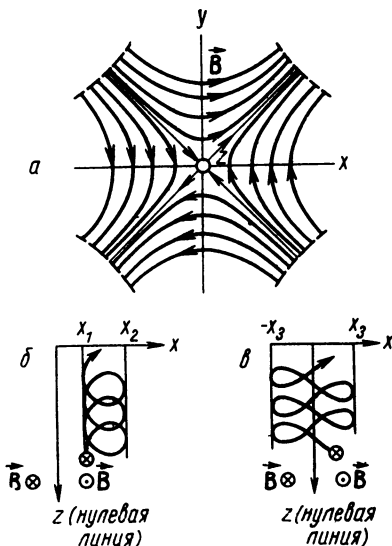


Рис. 2.8. Движение в гиперболическом магнитном поле:

*a* — форма силовых линий поля; *б* — пример траектории для первого случая. Существует два значения  $x^2$ , для которых  $x$  в соответствии с уравнением (2.114) обращается в нуль; *в* — пример траектории для второго случая. Имеется только одно значение  $x^2$ , при котором  $x=0$ .

Для  $w_y=0$  уравнение (2.123) дает следующий результат

$$\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 = (1 - x'^2)(x'^2 - c_3^2). \quad (2.128)$$

Решением этого уравнения [61] является

$$x' = dn t', \quad (2.129)$$

где  $dn t'$  — эллиптическая функция. Тогда из уравнения (2.121) получим

$$\dot{z} = \omega_0 + \frac{2\omega_0 (dn^2 t' - 1)}{c_2^2}. \quad (2.130)$$

Вводя  $dz/dt'$  вместо  $\dot{z}$ , это соотношение можно проинтегрировать, в результате чего получаем

$$z = \left(\frac{2\omega_0}{c_0}\right)^{1/2} \frac{zn t' - \frac{c_2^4 C t'}{2K}}{c_2}, \quad (2.131)$$

где эллиптическая функция Якоби  $zn t'$  периодична с периодом  $2K$ , а  $C$  и  $K$  — эллиптические интегралы, определение которых можно найти, например, в работе [61].

## 2. Два действительных и два мнимых корня

Введением новых переменных  $x'$  и  $t'' = (2c_0\omega_0)^{1/2} t$  преобразуем уравнение (2.123)

$$\left(\frac{dx'}{dt''}\right)^2 = (1 - x'^2)(c_5^2 + c_4^2 t''^2), \quad (2.132)$$

где  $c_4 = 1/c_2$  и  $c_5^2 = 1 - c_4^2$ . Его решением будет эллиптическая функция

$$x' = cn t''. \quad (2.133)$$

После интегрирования уравнения (2.121) получим

$$z = \frac{\omega_0}{2c_0} \left[ 2zn t'' + \frac{(2E - K) t''}{K} \right], \quad (2.134)$$

где  $E$  — эллиптический интеграл.

**3. Действительных корней нет.** Этот случай не представляет физического интереса, поскольку скорость оказывается чисто мнимой.

В первом случае траектория частицы, как это видно из рис. 2.8, б, напоминает трохлоиду. Во втором — траектория частицы проходит через линию, где магнитное поле обращается в нуль, как это показано на рис. 2.8, а, а точки пересечения являются центрами симметрии траектории частицы (рис. 2.8, в). На разных сторонах от нулевой линии магнитное поле имеет противоположные направления. Когда частица во втором случае пересекает силовую линию, ее траектория проходит через точку перегиба и центр кривизны переходит с одной стороны траектории на другую.

#### 4. 4. Однородное, зависящее от времени магнитное поле

Рассмотрим однородное магнитное поле  $\vec{B} = (0, 0, B(t))$ , которое изменяется во времени и направлено вдоль оси  $z$  прямоугольной системы координат. В этом случае закон индукции (2.1) запишем в виде

$$\text{rot } \vec{E} = -\hat{z} \dot{B}, \quad (2.135)$$

где  $\hat{z}$  — единичный вектор вдоль оси  $z$ . Допустим, кроме того, что нет никаких пространственных зарядов  $\sigma$ , т. е., согласно выражению (2.7),  $\text{div } \vec{E} = 0$ . Последнее соотношение, а также уравнение (2.135) выполняются, если поле задать в виде

$$\vec{E} = -\frac{1}{2} (\hat{z} \times \vec{\rho}) \dot{B}, \quad (2.136)$$

где  $\vec{\rho}$  — радиус-вектор точки наблюдения. Используя это выражение для  $\vec{E}$  и вводя гирочастоту  $\omega_g(t) = qB(t)/m$ , уравнение (2.36) можно привести к виду

$$\ddot{\vec{\rho}} + \frac{1}{2} (\hat{z} \times \vec{\rho}) \dot{\omega}_g + \hat{z} \times \vec{\rho} \omega_g = 0. \quad (2.137)$$

Вводя переменную  $\zeta_1 = x + iy$ ,  $i \equiv (-1)^{1/2}$  и комбинируя  $x$ - и  $y$ -компоненты уравнения (2.137), получаем

$$\ddot{\zeta}_1 + i\omega_g \dot{\zeta}_1 + \frac{1}{2} i\dot{\omega}_g \zeta_1 = 0. \quad (2.138)$$

При помощи дополнительной подстановки

$$\zeta = \zeta_1 \exp\left(-\frac{1}{2} i \int \omega_g dt\right) \quad (2.139)$$

уравнение (2.138) преобразуется [62]

$$\zeta'' + \frac{1}{4} \omega_g^2 \zeta = 0. \quad (2.140)$$

Это уравнение совпадает с уравнением гармонического осциллятора, у которого возвращающая сила изменяется со временем.

Решение выражения (2.140) для произвольной функции  $\omega_g(t)$  довольно сложная задача. Рассмотрим только некоторые частные случаи.

**1.  $\omega_g = \omega_{g0} \cos \omega_0 t$ ;  $\omega_0$  и  $\omega_{g0}$  — постоянны**

Если в уравнении (2.140) положить  $t' = \omega_0 t$ , то

$$\frac{d^2 \zeta}{dt'^2} + \frac{\omega_{g0}^2}{8\omega_0^2} (1 + \cos 2t') \zeta = 0. \quad (2.141)$$

Уравнение (2.141) представляет собой известное дифференциальное уравнение Матье.

**2.  $\omega_g = \omega_{g0} (t/t_0)^{1/\nu}$ , где  $\nu$  — целое число, а  $t_0$  — постоянная**

В этом случае уравнение (2.140) запишем как

$$\frac{d^2 \zeta}{dt'^2} + c_0 t'^{\nu} \zeta = 0, \quad (2.142)$$

где  $t' = t/t_0$  и  $c_0 = \frac{1}{2} (\omega_{g0} t_0)^2$ . Согласно [61] его решение имеет следующий вид:

$$\zeta = t'^{1/2} Z_{1/(\nu+2)} \left[ 2c_0^{1/2} (\nu+2)^{-1} t' \left( 1 + \frac{1}{2} \nu \right) \right], \quad (2.143)$$

где  $Z_{1/(\nu+2)} = c_1 J_{1/(\nu+2)} + c_2 N_{1/(\nu+2)}$  — линейная комбинация функций Бесселя  $J_{1/(\nu+2)}$  и  $N_{1/(\nu+2)}$  с действительными или комплексными постоянными интегрирования.



**ДРЕЙФОВАЯ ТЕОРИЯ**

Число случаев, для которых можно точно рассчитать траектории заряженной частицы в магнитном поле, сравнительно невелико. Даже для поля магнитного диполя задача оказывается довольно сложной [1, 56, 63]. Детальный анализ траекторий заряженных частиц представляет особый интерес, например для физики космических лучей. Такой анализ необходим в том случае, когда энергия частиц достаточно велика и радиус кривизны траектории сравним с характерными масштабами изменения магнитного и электрического полей.

С другой стороны, частицы нередко находятся в таком сильном магнитном поле, что их ларморовские радиусы оказываются очень малыми. Наиболее важные особенности движения можно тогда описать как быстрое вращение частицы по ларморовской окружности, которое накладывается на медленный дрейф ведущего центра. В таких случаях нет необходимости определять детальную структуру траектории частицы. Движение ведущего центра в первом порядке теории возмущений изучал Альфвен [10, 22], который определил также границы применимости сделанных приближений. Высшие порядки теории возмущений рассматривались в работах [45—48; 64—69]. Теория Альфвена вооружила физиков простым методом вычислений среднего движения частицы и упростила физическую интерпретацию этих вычислений.

**§ 3. 1. ДВИЖЕНИЕ ВЕДУЩЕГО ЦЕНТРА**

Прежде чем перейти к детальному изучению траекторий частиц, выясним исходные пункты теории возмущений и сущность принимаемых приближений. Допустим [9, 10], что изменения магнитного поля на протя-

жении ларморовского радиуса  $a$  и за промежуток времени, равный ларморовскому периоду  $2\pi/\omega_g$ , малы, т. е.

$$a \left| \frac{\partial B_j}{\partial x_k} \right| / |B_j| \ll 1 \quad (3.1)$$

и

$$\frac{1}{\omega_g} \left| \frac{dB_j}{dt} \right| / |B_j| \ll 1. \quad (3.2)$$

причем это справедливо для всех компонент  $B_j$  магнитного поля и пространственных координат  $x_k$ . Дифференцирование по времени в уравнении (3.2) производят в системе отсчета, движущейся вместе с частицей. Допустим, кроме того, что соотношения типа (3.1) и (3.2) выполняются и для любого другого поля внешних сил  $\vec{F}$ , с которым взаимодействует частица.

Согласно условиям (3.1) и (3.2), на протяжении ларморовского радиуса поля  $\vec{B}$  и  $\vec{F}$ , действующие на частицу, должны изменяться сравнительно мало. Это означает, в частности, что продольные скорости не могут быть слишком большими. Следовательно, продольная составляющая силы  $\vec{F}_{\parallel} = \vec{F} \cdot (\vec{B}/B)$  и соответствующее ускорение должны быть достаточно малы [46]. Не следует думать, однако, что сила  $\vec{F}_{\parallel}$  должна равняться нулю. В некоторых случаях неоднородность магнитного поля может создавать эффекты, которые частично уравнивают действие  $\vec{F}_{\parallel}$  и благодаря которым продольная скорость не может стать бесконечной даже при наличии продольного поля сил [22].

На поперечную составляющую силы  $\vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{\parallel}$  также накладываются некоторые ограничения. В частности, поперечная составляющая не должна приводить к чрезмерно большому росту поперечных скоростей частицы и ее ларморовского радиуса, в результате которого условия (3.1) и (3.2) оказались бы нарушенными. Дальнейшее обсуждение ограничений, накладываемых на  $\vec{F}_{\parallel}$  и  $\vec{F}_{\perp}$  и необходимых для применимости теории возмущений, будет продолжено в разделе 1.3.

Кроме того, не будем учитывать изменений полей  $\vec{B}$  и  $\vec{F}$  за счет движения отдельной частицы, и эти поля рассмотрим как заданные извне.

Воспользовавшись этими основными допущениями, получим уравнение движения (2.36)

$$\epsilon \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{\vec{F}}{q} + \vec{w} \times \vec{B}, \quad \epsilon = \frac{m}{q}, \quad \vec{w} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (3.3)$$

Левая часть этого соотношения и последний член в правой части имеют точно такую же форму, как соответствующие члены безразмерных уравнений (2.42), где параметр  $k_1$  соответствует  $\epsilon$ .

Существует, по крайней мере, два способа, при помощи которых можно интерпретировать параметр  $\epsilon$ . Первый способ состоит в том, что в уравнении (2.43) характерную длину  $L_c$  выбирают равной характерному масштабу изменения магнитного поля, а  $t_c$  полагают равным такому промежутку времени, в течение которого заметно изменяется магнитное поле при наблюдении его в системе координат, движущейся вместе с частицей. Тогда  $k_1$  и  $\epsilon$  становятся равными отношению циклотронного периода к этому промежутку времени. Во втором случае вместо  $L_c$  подставляют ларморовский радиус, а  $t_c$  приравнивают циклотронному периоду. Тогда  $k_1$  и  $\epsilon$  равны отношению ларморовского радиуса к характерному масштабу магнитного поля. Следовательно, в обоих случаях  $\epsilon$  мало при больших магнитных полях. Кроме того, согласно основным допущениям (3.1) и (3.2), циклотронный период также оказывается малым по сравнению с характерным временем изменения внешних полей, а ларморовский радиус — много меньше характерных масштабов изменения этих полей. Это, конечно, не означает, что можно просто пренебречь левой частью уравнения (3.3); такая процедура справедлива только в некоторых частных случаях. Однако существование малого параметра  $\epsilon$  позволяет сделать несколько последовательных приближений по степеням этого параметра.

Посмотрим теперь, как при помощи основного уравнения (3.3) можно исследовать траекторию частицы. Согласно пункту 1 раздела 4.1 гл. 2, траектория частицы в однородном магнитном поле имеет форму спирали и

представляет собой вращение со скоростью  $W_0$ , которое накладывается на движение ведущего центра. Положение частицы задается тогда следующим образом:

$$\vec{\rho}(t) = \vec{C}(t) + \varepsilon \vec{C}_1 \cos \omega_g t + \varepsilon \vec{S}_1 \sin \omega_g t = \vec{C} + \vec{a}, \quad (3.4)$$

где  $\vec{C}(t)$  — обозначает положение ведущего центра, который скользит вдоль силовой линии. Величины

$$\varepsilon \vec{C}_1 = \frac{\widehat{B} \times \vec{W}_0}{\omega_g}, \quad \varepsilon \vec{S}_1 = \frac{\vec{W}_0}{\omega_g} \quad (3.5)$$

представляют собой два взаимно перпендикулярных вектора, модуль каждого равен  $a$ .

Основываясь на этих результатах, можно теперь перейти к рассмотрению слабо неоднородных полей  $\vec{B}$  и  $\vec{F}$ , которые удовлетворяют условиям (3.1) и (3.2), а также допущениям, сделанным в начале этого параграфа.

Тогда отклонение частицы от траектории, задаваемой уравнениями (3.4) и (3.5), будет мало. Поэтому можно искать радиус-вектор частицы в виде ряда по степеням  $\varepsilon$  [45, 47, 64]

$$\begin{aligned} \vec{\rho}(t) = \vec{C}(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \left\{ \vec{C}_{\nu}(t) \cos \frac{\nu \vartheta(t)}{\varepsilon} + \vec{S}_{\nu}(t) \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{\nu \vartheta(t)}{\varepsilon} \right\} \equiv \vec{C}(t) + \vec{a}(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь  $d\vec{C}/dt$ ,  $\vec{C}_{\nu}(t)$  и  $\vec{S}_{\nu}(t)$  — медленно меняющиеся функции времени. Вращение описывается тригонометрическими функциями от фазы  $\vartheta/\varepsilon$  и, благодаря обратной пропорциональности этой фазы и малой величине  $\varepsilon$ , представляют собой быстро осциллирующие периодические функции.

Берковиц и Гарднер [70] показали, что разложение (3.6) является точным асимптотическим рядом для истинной траектории частицы. Это означает, что выражение (3.6) можно использовать для точного решения задачи, определяемой уравнением движения (3.3).

В однородном магнитном поле при  $F=0$  выражение (3.6) должно переходить в формулу (3.4) так, чтобы  $\vec{C}_v$  и  $\vec{S}_v$  при  $v>1$  обращались в нуль, а  $\vartheta$  становилось равным  $Vt$ . Для неоднородных полей  $\vec{B}$  и  $\vec{F}$  разложение (3.6) означает, что частица должна все еще совершать неосциллирующее дрейфовое движение, определяемое центром вращения  $\vec{C}(t)$ , на которое накладывается быстрое осциллирующее движение, описываемое вектором  $\vec{a}(t)$ . Последний определяет положение частицы относительно центра вращения  $\vec{C}(t)$ . В наинизшем порядке теории возмущений ( $v=1$ ) вектор  $\vec{a}$  описывает вращение с циклотронной частотой вокруг силовой линии магнитного поля, на которой находится ведущий центр частицы. Члены высшего порядка по  $\epsilon$  в разложении (3.6) добавляют небольшие поправки к решению, полученному в первом порядке теории возмущений. Эти члены являются высшими гармониками циклотронной частоты, а амплитуда их по крайней мере в  $\epsilon$  раз меньше модуля  $\vec{a}$ .

До сих пор не было дано точного определения того, что же следует понимать под радиусом вращения частицы в высших порядках по  $\epsilon$ . В действительности коэффициенты уравнения (3.6) можно определить, подставив выражение для  $\vec{\rho}$  в уравнение движения и решив последнее. Тогда коэффициенты будут выражены через заданные поля  $\vec{B}$  и  $\vec{F}$ . Для нахождения высших приближений дрейфовой теории для осциллирующей части движения частицы будем использовать выражение (3.6). Заметим также, что в первом порядке  $|\vec{a}|$  тождественно совпадает с выражением (2.81) для ларморовского радиуса.

Для решения уравнения (3.3) воспользуемся разложениями полей  $\vec{B}$  и  $\vec{F}$  по степеням радиуса вращения частицы. Иными словами, разложим поля в ряды Тейлора около центра вращения  $\vec{C}$

$$\vec{B}[\vec{\rho}(t)] = \vec{B}_C + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v!} (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^v \vec{B}_C \quad (3.7)$$

и

$$\vec{F}[\vec{\rho}(t)] = \vec{F}_C + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{-1}{\nu!} (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^{\nu} \vec{F}_C; \quad (3.8)$$

индекс  $C$  указывает, что величины вычислены в точке, где в данный момент времени находится центр вращения  $C$  частицы. Перейдем теперь к детальному изучению дрейфа ведущего центра.

### 1. 1. Дрейфовая теория в первом приближении по параметру $\varepsilon$

В первом приближении можно пренебречь эффектами высшего порядка и уравнение движения ведущего центра записать на основании интуитивных соображений. Приближения, которые используются при этом, будут обоснованы в разделе 1.3. Введем, согласно уравнению (3.6), следующие обозначения:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{C}}{dt}, \quad \vec{W} = \frac{d\vec{a}}{dt}, \quad \vec{w} = \vec{u} + \vec{W}. \quad (3.9)$$

Здесь полная скорость частицы  $\vec{w}$  разделена на две составляющие: скорость ведущего центра  $\vec{u}$  и скорость вращения  $\vec{W}$  (ларморовское движение). В первом приближении вектор скорости ларморовского движения перпендикулярен  $\vec{B}$ . Подставляя в уравнение (3.3) обозначения (3.9), получаем

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{u}}{dt} - \vec{F}_C - q\vec{u} \times \vec{B}_C - q\vec{W} \times \Delta\vec{B} &= q\vec{u} \times \Delta\vec{B} + \\ &+ q\vec{W} \times \vec{B}_C - m \frac{d\vec{W}}{dt} + \Delta\vec{F}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Выражения

$$\begin{aligned} \Delta\vec{B} &= \vec{B}(\vec{\rho}) - \vec{B}_C \approx (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_C, \\ \Delta\vec{F} &= \vec{F}(\vec{\rho}) - \vec{F}_C \approx (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{F}_C \end{aligned} \quad (3.11)$$

дают отклонения  $\vec{B}$  и  $\vec{F}$  от значений  $\vec{B}_C$  и  $\vec{F}_C$  в точке, где находится мгновенный центр вращения, причем эти отклонения выражаются через производные, взятые в той же точке. Величина этих отклонений определяется изменением поля на протяжении ларморовского радиуса  $\vec{a}$ .

Изменение  $\vec{B}$  и влияние  $\vec{F}$  слабо возмущают вращение. Поэтому осциллирующее движение в первом приближении можно описать выражениями (2.80) — (2.82) для  $\vec{a}$  и  $\vec{W}$  в однородном магнитном поле. Тогда второй и третий члены в правой части уравнения (3.10) почти взаимно уничтожаются. При этом их разность оказывается равной малой осциллирующей величине, в которую вносят вклад как оставшиеся слагаемые в правой части, так и последнее слагаемое в левой части уравнения (3.10).

Фактически здесь не потребуется детального анализа этих осцилляций, поскольку главным образом нас будет интересовать траектория частицы, усредненная по одному циклотронному периоду  $2\pi/\omega_g$ . Поэтому умножим равенство (3.10) на  $(\omega_g/2\pi)dt$  и проинтегрируем по одному циклотронному периоду. Среднее значение любой величины  $\chi$  по одному циклотронному периоду обозначим  $\langle \chi \rangle$ . Тогда уравнение (3.10) принимает следующий вид:

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}_C + q\vec{u} \times \vec{B}_C + q \langle \vec{W} \times \Delta \vec{B} \rangle. \quad (3.12)$$

При выводе этого результата мы воспользовались тем, что величина  $d\vec{C}/dt = \vec{u} \approx \langle \vec{u} \rangle$  медленно меняется на протяжении циклотронного периода, а средние значения компонент  $\vec{a}$  и  $\vec{W}$  в этом приближении равны нулю:  $\langle a_k \rangle = 0$ ,  $\langle W_k \rangle = 0$ . Если пренебречь последним членом в уравнении (3.12), который связан с неоднородностью магнитного поля, то полученное уравнение на первый взгляд оказывается совершенно эквивалентным уравнению движения (2.36). Однако уравнение (2.36) описывает истинное осциллирующее движение частицы, имеющей скорость  $\vec{w}$ , тогда как выражение (3.12) — движение ведущего центра частицы, причем

скорость ведущего центра  $\vec{u}$  незначительно изменяется за время ларморовского периода.

Дадим теперь наглядную физическую интерпретацию последнему члену в уравнении (3.12), который описывает влияние неоднородности магнитного поля на дрейфовое движение. Если перейти к системе координат, движущейся вместе с частицей, то  $\vec{W}$  и  $\Delta\vec{B}$  будут

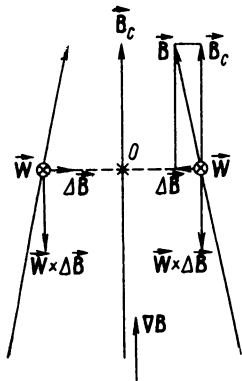


Рис. 3.1. Силы, действующие на частицу, которая движется в неоднородном магнитном поле с градиентом  $\vec{\nabla}B$ , направленным вдоль  $\vec{B}$ .

осциллировать с циклотронной частотой, а их векторное произведение, усредненное за один циклотронный период, даст отличный от нуля вклад. В том случае, когда градиент модуля напряженности магнитного поля имеет не равную нулю проекцию на направление магнитного поля  $\vec{B}$ , силовые линии будут сходящимися и, как показано на рис. 3.1, возникает сила  $q\vec{W} \times \Delta\vec{B}$ . Эта сила, стремящаяся вытолкнуть частицы из областей с большой напряженностью магнитного поля, лежит в основе так называемого магнитного «зеркала». Она связана также с диамагнитными свойствами ионизованного газа.

Если градиент магнитного поля имеет компоненту, направленную поперек  $\vec{B}$ , то сила  $q\vec{W} \times \Delta\vec{B}$  осциллирует на протяжении циклотронного периода, а ее среднее значение для положительного заряда частицы на рис. 3.2, а направлено вверх. По аналогии с электрическим дрейфом (см. рис. 2.4, в) сила, обусловленная неоднородностью магнитного поля, приводит к дрейфовому движению, которое на рис. 3.2, б направлено вправо. Происхождение этого дрейфа разъясняется на рис. 3.2, б. Поскольку полная скорость  $\vec{w}$  сохраняет постоянную величину, а радиус кривизны в нижней части траектории частицы, где поле сильнее, меньше, чем в верхней, то частица движется вправо. При этом ионы и электроны дрейфуют в противоположных направлениях.



Согласно уравнениям (2.80) и (2.82),  $\vec{a}$  и  $\vec{W}$  в первом приближении перпендикулярны  $\vec{B}$ . Введем локальную прямоугольную систему координат с осью  $z$ , направленной вдоль  $\vec{B}$ . Тогда уравнения (2.82) и (3.11) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \vec{W} \times \Delta \vec{B} &= \omega_g (\vec{a} \times \vec{B}) \times [(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}] \approx \\ &\approx \omega_g [-a_x (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) B_z, -a_y (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) B_z, a_y (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) B_y + \\ &\quad + a_x (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) B_x]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

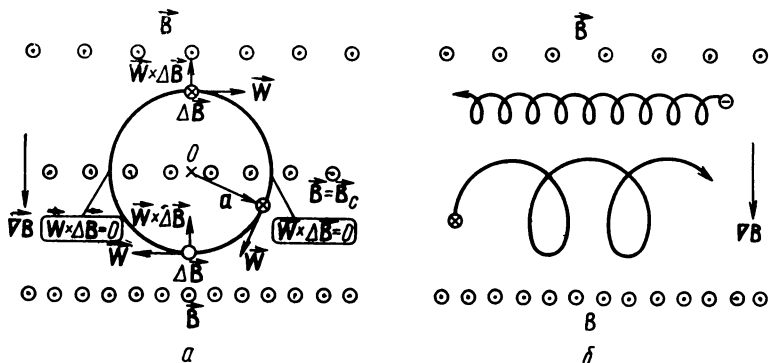


Рис. 3.2. Силы, действующие на частицу, когда  $\vec{\nabla} B$  перпендикулярен  $\vec{B}$ :

$a$  — неоднородность магнитного поля  $\Delta B$  порождает среднюю силу, направленную вверх в случае положительных ионов;  $b$  — дрейфовое движение, обусловленное неоднородностью, имеет противоположные направления для ионов и электронов.

Здесь индекс  $C$  опущен, поскольку  $|\Delta \vec{B}|/B \ll 1$ . Это означает, что первую производную от  $\vec{B}$  мы считаем постоянной на протяжении ларморовского радиуса и пренебрегаем членами второго порядка в разложении (3.7). Заметим, что усреднение по циклотронному периоду согласно выражению (2.80), приводит к соотношениям

$$\langle a_x a_y \rangle = 0, \quad \langle a_x^2 \rangle = \langle a_y^2 \rangle = \frac{1}{2} a^2 = \frac{W^2}{2\omega_g^2}.$$

Поэтому

$$\langle \vec{W} \times \Delta \vec{B} \rangle = -\frac{W^2}{2\omega_g} \vec{\nabla} B_z, \quad (3.14)$$

где  $B_x$  и  $B_y$  выражены через  $B_z$  при помощи уравнения  $\text{div } \vec{B} = 0$ . Тогда

$$\vec{\nabla} B_z = \frac{1}{2B_z} \vec{\nabla} B_z^2 = \frac{\vec{B} \nabla B - B_x \vec{\nabla} B_x - B_y \vec{\nabla} B_y}{B_z} \approx \vec{\nabla} B. \quad (3.15)$$

Это справедливо потому, что  $B_x$  и  $B_y$  много меньше  $B$  и кривизной магнитного поля можно пренебречь. В соответствии с определением (2.83) введем модуль эквивалентного магнитного момента  $M = mW^2/2B$ . Согласно выражениям (3.14) и (3.15), уравнение движения (3.12) ведущего центра принимает следующий вид

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} + q\vec{u} \times \vec{B} - M \vec{\nabla} B, \quad M = \frac{mW^2}{2B}, \quad (3.16)$$

где индекс  $C$  также опущен, поскольку  $\vec{F}$  и  $\vec{B}$  мало меняются на протяжении ларморовского радиуса. Заметим, что полная производная по времени в левой части уравнения (3.16) вычисляется в системе координат, движущейся вместе с частицей. Однако, поскольку изменения всех величин на длине ларморовского радиуса частицы очень малы, эта производная приблизительно равна производной в системе координат, движущейся вместе с ведущим центром. В разделе 1.3 уравнение (3.16) будет получено еще раз при помощи разложения (3.6), и мы убедимся, что строгое рассмотрение приводит к результату (3.40), в точности совпадающему с полученным здесь.

Уравнение (3.16) означает, что усредненное движение можно представить как движение некоторой эквивалентной частицы, имеющей скорость, равную скорости ведущего центра  $\vec{u}$ , и эквивалентный магнитный момент  $\vec{M} = -M\vec{B}/B$ . Разложим это движение на компоненты вдоль и поперек магнитного поля. Умножая скалярно

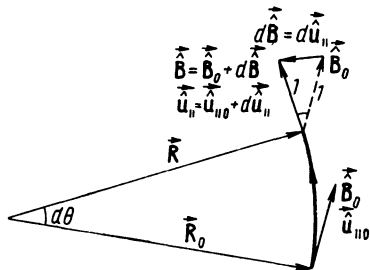
уравнение (3.16) на единичный вектор  $\widehat{\vec{B}} = \vec{B}/B$ , получаем уравнение для продольного движения

$$m\widehat{\vec{B}} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} \cdot \widehat{\vec{B}} - M(\widehat{\vec{B}} \cdot \nabla) B. \quad (3.17)$$

Выражение для поперечной дрейфовой скорости можно получить умножая векторно уравнение (3.16) на  $\vec{B}/qB^2$

$$\vec{u}_\perp = \left( \vec{F} - M\nabla B - m \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \times \frac{\vec{B}}{qB^2}. \quad (3.18)$$

Заклученный в скобки множитель в правой части этого уравнения содержит ускорение, часть которого обусловлена продольным дрейфом  $\vec{u}_\parallel = \vec{u} - \vec{u}_\perp$ . Этот дрейф создается центробежной силой, которая определяется (рис. 3.3) радиусом кривизны магнитных силовых линий. При этом находим ускорение



$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} &= u_\parallel \frac{d\vec{u}}{dt} + \\ &+ \widehat{u}_\parallel \frac{du_\parallel}{dt} + \frac{d\vec{u}_\perp}{dt}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Рис. 3.3. В магнитном поле  $\vec{B}$  с радиусом кривизны  $\vec{R}$  продольное дрейфовое движение  $\vec{u}_\parallel$  приводит к центробежному ускорению.

За интервал времени  $dt$  частица проходит расстояние  $|\vec{R}| d\theta = u_\parallel dt$  вдоль магнитной силовой линии от точки, где напряженность поля равна  $\vec{B}_0$ , к точке с напряженностью  $\vec{B}$ . Тогда единичный вектор  $\widehat{u}_\parallel = \vec{u}_\parallel / u_\parallel$  изменится на величину

$$\begin{aligned} d\widehat{u}_\parallel &= \widehat{u}_\parallel - \widehat{u}_{\parallel 0} = \widehat{B} - \widehat{B}_0 = (|\vec{R}| d\theta \cdot \widehat{B} \cdot \nabla) \widehat{B} = \\ &= u_\parallel (\widehat{B} \cdot \nabla) \widehat{B} dt. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Пользуясь хорошо известным векторным тождеством, получаем

$$(\widehat{\vec{B}} \cdot \widehat{\nabla}) \widehat{\vec{B}} = -\widehat{\vec{B}} \times \text{rot } \widehat{\vec{B}} = \frac{B \vec{\nabla}_{\perp} B - \vec{B} \times \text{rot } \vec{B}}{B^2}. \quad (3.21)$$

Подставляя выражения (3.19)–(3.21) в равенство (3.18), имеем

$$\begin{aligned} \vec{u}_{\perp} = & \left[ \vec{F} - M \left( 1 + \frac{2u_{\parallel}^2}{W^2} \right) \vec{\nabla} B - m \frac{d\vec{u}_{\perp}}{dt} \right] \times \\ & \times \frac{\vec{B}}{qB^2} + \left( \frac{2Mu_{\parallel}^2}{W^2 qB} \right) (\text{rot } \vec{B})_{\perp}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где, согласно основным допущениям этого параграфа, исключена возможность предельного перехода  $\vec{B} = 0$ .

Инерционный член в квадратных скобках можно определить, применяя к уравнению (3.22) метод последовательных приближений. Если скорость, определяемую выражением (3.25), обозначить  $\vec{u}_m$ , то метод последовательных приближений будет состоять в том, что выражение для  $\vec{u}_{\perp} - \vec{u}_m$  подставляется в правую часть уравнения (3.22). Повторяя последовательно эту процедуру, получаем все более точные приближения для скорости  $\vec{u}_{\perp}$ .

В уравнении (3.22) содержатся следующие типы поперечных дрейфовых движений:

$$\vec{u}_F = \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{qB^2} \quad (\text{дрейф под действием внешней силы}), \quad (3.23)$$

$$\vec{u}_B = \left[ \frac{M(1 + 2u_{\parallel}^2/W^2)}{qB^2} \right] \vec{B} \times \vec{\nabla} B \quad (\text{градиентный дрейф}), \quad (3.24)$$

$$\vec{u}_m = \left( \frac{m}{qB^2} \right) \vec{B} \times \frac{d\vec{u}_{\perp}}{dt}$$

$$(\text{поперечный инерционный дрейф}), \quad (3.25)$$

$$\vec{u}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (\text{электрический дрейф}), \quad (3.26)$$

$$\vec{u}_p = \left( \frac{m}{qB^4} \right) \vec{B} \times \left( \frac{\partial E}{\partial t} \times \vec{B} \right) = \frac{m}{qB^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}_\perp}{\partial t}$$

(поляризационный дрейф). (3.27)

Природа электрического дрейфа и дрейфа в поле внешних сил уже обсуждалась в гл. 2. Наглядное представление о таких дрейфовых движениях можно получить из рис. 2.4, б. Происхождение электрического дрейфа можно объяснить следующим образом. Всегда существует система координат, которая движется относительно лабораторной системы со скоростью  $\vec{u}_E$ . В этой системе координат электрическое поле оказывается равным нулю. Заметим, что электрический дрейф в отличие от гравитационного не зависит от знака заряда частицы.

В том случае когда поле сил или электрическое поле обусловлено только градиентами потенциала, расположенными в плоскости, перпендикулярной  $\vec{B}$ , дрейфовые движения будут происходить по соответствующим эквипотенциальным поверхностям.

Градиентный дрейф, обусловленный неоднородностью магнитного поля, направлен, как легко видеть из уравнения (3.24), вдоль поверхностей  $B = \text{const}$ . Дрейфовое движение, обусловленное неоднородностью магнитного поля, можно разделить на две части. Дрейф, определяемый первым слагаемым в уравнении (3.24), возникает вследствие влияния неоднородности магнитного поля на ларморовское вращение. В гл. 4 показано, что эквивалентный магнитный момент  $M$  есть приближенный интеграл движения; поэтому первая часть градиентного дрейфа полностью определяется значениями  $\vec{B}$  и  $W$ . Влияние кривизны силовых линий магнитного поля проявляется как во второй части градиентного дрейфа, так и в последнем члене уравнения (3.22). Отметим, что влияние кривизны магнитного поля на движение частицы зависит от отношения  $u_{\parallel}^2/W^2$ , которое не является интегралом движения, а изменяется по мере дрейфа частицы вдоль магнитного поля. Если же силовые линии не искривлены, то вто-

рая часть сокращается с последним членом в выражении (3.22).

Для частного случая поля, создаваемого линейным током, дрейфовое движение частицы в неоднородном магнитном поле было изучено еще в 1906 г. Томсоном [71]. Альфвен [8, 9] показал, что в первом порядке теории возмущений движение центра вращения частицы практически совпадает со средним движением частицы, рассчитанным для поля магнитного диполя Штермером [63]. Точность выражения (3.24) для движения частицы в поле линейного тока, рассмотренного в гл. 2, оценивалась в работе [59]. Там показано, что использование теории возмущений приводит в данном случае к незначительным ошибкам.

С точки зрения наблюдателя, совершающего вместе с ведущим центром ускоренное движение, должны существовать сила инерции и соответствующий дрейф (3.25). Этот дрейф аналогичен гравитационному. Важную часть дрейфового движения составляет поляризационный дрейф, задаваемый формулой (3.27). Он связан с изменением электрического дрейфа частицы во времени, причем электрическое поле совершает над частицей некоторую работу. Действительно (см. рис. 2.4,  $\delta$ ), частица «падает» перпендикулярно эквипотенциальным электрическим поверхностям, приобретая ускорение поперек статического магнитного поля в отрицательном направлении оси  $y$ . Тот же результат можно получить, приравняв работу, затраченную на ускорение частицы, энергии, полученной от внешнего электрического поля. Частица приобретает эту энергию за счет поляризационного дрейфа  $\vec{u}_p$  в электрическом поле. В этом конкретном случае при малых скоростях, когда  $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}_E \approx 0$ , должно выполняться следующее соотношение:

$$\frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial t} (u_E^2) = q \vec{u}_p \vec{E}. \quad (3.28)$$

Подставим в это уравнение  $\vec{E}_\perp = \vec{B} \times \vec{u}_E$  и воспользуемся тем, что  $(\vec{u}_p \times \vec{B}) \vec{u}_E \neq 0$ . Тогда для  $\vec{u}_p$  получим выражение, совпадающее с формулой (3.27).

Отметим, что для частиц с разными знаками заряда поляризационный дрейф имеет противоположное направление. Это приводит к разделению зарядов (см. рис. 2.4, в), причем траектории ионов и электронов расходятся в разные стороны. Разделение зарядов — это один из самых существенных механизмов, определяющих поведение замагниченной плазмы. В дальнейшем покажем, что разделение зарядов в плазме можно выразить при помощи эквивалентной диэлектрической проницаемости.

Известны и другие эффекты, которые связаны с ускорением поперечного движения ведущего центра. Следует отметить, что в  $\vec{d}\vec{u}_\perp/dt = \vec{d}\vec{u}_\perp/dt + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}_\perp$  содержатся члены, аналогичные тем, которые вызывают поляризационный дрейф. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим дрейф, обусловленный поперечной силой  $\vec{F}_\perp = q\vec{E}_\perp$  нулевого порядка малости. Такое поле возникает, например, в плазме, которая быстро вращается вокруг оси магнитного поля пробочной конфигурации. На расстоянии  $r$  от оси системы движение частиц со скоростью  $\vec{u}_E$  создает центробежную силу, причем соответствующий этой силе дрейф равен  $m\vec{u}_E^2/qBr$ . Этот инерционный дрейф может оказаться существенным в уравнении (3.22). В частности, когда  $\vec{u}_E$  достигает по порядку величины тепловой скорости  $W$ , траектории частиц будут подобны тем, которые показаны на рис. 2.4, в. Если при этом радиальное расстояние  $r$  и радиус кривизны  $R$  силовых линий сравнимы, а  $u_E$  порядка  $u_\parallel$ , то инерционный дрейф, обусловленный  $\vec{u}_E$ , имеет такое же значение, как и дрейф, связанный с  $u_\parallel$ . В гл. 7 будет показано, что можно получить явное выражение для дрейфа частицы под действием центробежной силы, если воспользоваться системой координат, вращающейся со скоростью  $\vec{u}_E$ .

Дальнейший анализ эффектов, приводящих к инерционному дрейфу, недавно продолжил Нортроп [68]. Он рассмотрел также случаи поперечного электрического поля, характерное время изменения которого сравнимо с периодом вращения частицы.

## 1. 2. Законы подобия

В гл. 2 уже рассматривались законы подобия для точного движения частицы. Проведем теперь аналогичные рассуждения по отношению к движению ведущего центра. Вводя  $\vec{C} = C_c \cdot \vec{C}'$  и  $\vec{W} = W_c \cdot \vec{W}'$ , получаем

$$K_1 \frac{d^2 \vec{C}'}{dt'^2} = -K_2 \vec{\nabla}' \varphi' - K_3 \vec{\nabla}' \varphi'_g - K_4 \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t'} + \\ + \frac{d\vec{C}'}{dt'} \times \text{rot}' \vec{A}' - K_5 W'^2 (\text{rot}' \vec{A}')^{-2} \vec{\nabla}' (\text{rot}' \vec{A}')^2, \quad (3.29)$$

где безразмерными параметрами являются

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{mL_c}{qA_c t_c} = k_1, \quad K_2 = \frac{t_0 \varphi_c}{A_c C_c}, \quad K_3 = \frac{m t_c \varphi_g c}{q A_c C_c}, \\ K_4 &= \frac{L_c}{C_c}, \quad K_5 = \frac{m t_c W_c^2}{4 q A_c C_c}. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Для системы подобных конфигураций (см. гл. 2) все эти параметры считаются постоянными. Фиксирование  $K_4$  имеет тривиальный смысл. Оно просто означает, что расстояние ведущего центра от начала координат должно изменяться пропорционально размерам конфигурации как целого. Без потери общности можно положить  $C_c = \text{const} \cdot L_c$  и опустить  $K_4$ .

Отметим прежде всего, что для точного подобия траекторий требуется рассматривать все безразмерные константы, определенные соотношениями (3.30). В частности, положив  $L_c$  и  $t_c$  равными соответственно лармовскому радиусу и циклотронному периоду, получим  $W_c = \text{const} \cdot (L_c/t_c)$  и  $K_5 = \text{const} \cdot K_4$ . Таким образом, получаем те же условия подобия, которые были уже установлены в гл. 2 для точного уравнения движения. Это и не удивительно, поскольку до тех пор, пока в уравнении (3.29) сохраняется инерционный член, для определения траектории частицы требуется очень высокая точность. Следует обратить особое внимание на то, что постоянство  $K_1$  и  $K_2$  означает, что  $A_c^2/\varphi_c$  и  $(B_c L_c)^2/\varphi_c$  должны быть постоянными, где  $B_c$  определяет характерную величину напряженности магнитного поля. Однако это очень затрудняет моделирование космических



явлений в экспериментальных условиях [41]. Действительно, в околоземном пространстве разность потенциалов на расстоянии, равном одному радиусу Земли, составляет около  $10^4$  в, а земное магнитное поле имеет напряженность около  $10^{-5}$  в·сек/м<sup>2</sup>. Поэтому в модельном эксперименте с магнитным полем порядка  $1$  в·сек/м<sup>2</sup> и размерами  $0,1$  м необходимо использовать напряжение около  $10^{-2}$  в, но это слишком малая величина. В лабораторных условиях разряд может поддерживаться лишь при значительно более высоких напряжениях.

Если рассматривать только форму траектории ведущего центра, то влияние инерционного члена в выражении (3.29) оказывается несущественным. В этом легко убедиться, если выбрать  $L_c \approx C_c$  и положить  $t_c$  равным характерному времени поперечного движения, так что  $L_c/t_c \approx \vec{u}_\perp$ . В этом случае когда относительные изменения величин  $\varphi$ ,  $\varphi_g$  и  $\vec{A}$  в пространстве и во времени оказываются того же порядка, что и относительное изменение  $\vec{u} = dC/dt$ , все члены со штрихами в уравнении (3.29) будут порядка единицы. Так как величина  $K_1$  приблизительно равна отношению циклотронного периода к характерному времени поперечного дрейфа, то инерционный член даст очень малый вклад по сравнению с другими членами в уравнении (3.29). В этом случае для приближенного подобия траектории ведущего центра достаточно потребовать постоянства параметров  $K_2$ ,  $K_3$  и  $K_5$ , если, конечно, электрическое поле разделения зарядов существенно влияет на величины  $\varphi'$ ,  $\varphi_c$  и  $K_2$ , определяемые уравнениями (3.29) и (3.30). Тогда, комбинируя выражения для  $K_2$  и  $K_5$ , получаем условие, при выполнении которого можно величину  $W_c^2/\varphi_c$  считать постоянной [41].

### 1. 3. Приближения более высокого порядка

До сих пор мы рассматривали дрейфовую теорию, в которой удерживались только члены первого порядка малости. Для подробного рассмотрения высших приближений следует обратиться к выражению (3.6). Подставим в уравнение движения (3.3) разложения, определяемые соотношениями (3.6)—(3.8) [45, 69].

В результате получим сложное выражение, которое будет содержать как неосциллирующие члены, так и ряд членов с различными гармониками основной частоты ( $\nu=1, 2, \dots$ ). Поскольку уравнение движения (3.3) должно выполняться в любой момент времени  $t$ , для каждой отдельной моды коэффициенты в правой части уравнения должны быть равны коэффициентам в левой части. Для неосциллирующих членов это приводит к уравнению движения ведущего центра

$$\begin{aligned} \varepsilon \ddot{\vec{C}} = & \frac{\vec{F}}{q} + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \frac{[(\vec{C}_1 \cdot \vec{\nabla})^2 + (\vec{S}_1 \cdot \vec{\nabla})^2] \cdot \vec{F}}{q} + \dot{\vec{C}} \times \vec{B} + \\ & + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \dot{\vec{C}} \times [(\vec{C}_1 \cdot \vec{\nabla})^2 + (\vec{S}_1 \cdot \vec{\nabla})^2] \vec{B} - \\ & - \frac{1}{2} \varepsilon \dot{\vec{C}} [\vec{C}_1 \times (\vec{S}_1 \cdot \vec{\nabla}) - \vec{S}_1 \times (\vec{C}_1 \cdot \vec{\nabla})] \vec{B} + \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon^2 [\dot{\vec{C}}_1 \times (\vec{C}_1 \cdot \vec{\nabla}) + \dot{\vec{S}}_1 \times (\vec{S}_1 \cdot \vec{\nabla})] \vec{B} + O(\varepsilon^3). \quad (3.31) \end{aligned}$$

Здесь опущен индекс  $C$ , означающий, что поля  $\vec{F}$  и  $\vec{B}$  и их производные вычислены в центре вращения, а точкой сверху обозначена производная по времени. Собирая члены перед  $\cos(\theta/\varepsilon)$  и  $\sin(\theta/\varepsilon)$ , получаем соответственно

$$\begin{aligned} \dot{\vec{S}}_1^2 \vec{C}_1 + \dot{\vec{S}}_1 \times \vec{B} = & \varepsilon (2\dot{\vec{S}}_1 + \ddot{\vec{S}}_1 - \vec{C}_1 \times \vec{B}) - \\ & - \varepsilon \dot{\vec{C}} \times [(\vec{C}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}] - \varepsilon \frac{(\vec{C}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{F}}{q} + O(\varepsilon^2) \quad (3.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{S}}_1^2 \vec{S}_1 - \dot{\vec{C}}_1 \times \vec{B} = & -\varepsilon (2\dot{\vec{C}}_1 + \ddot{\vec{C}}_1 + \vec{S}_1 \times \vec{B}) - \\ & - \varepsilon \dot{\vec{C}} \times [(\vec{S}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}] - \varepsilon \frac{(\vec{S}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{F}}{q} + O(\varepsilon^2). \quad (3.33) \end{aligned}$$

Уравнения (3.32) и (3.33) связаны в основном с вращением частицы вокруг ведущего центра. Члены, соответствующие более высоким модам колебаний ( $\nu \geq 2$ ), здесь не обсуждаются.

Уравнение движения ведущего центра (3.31) в наименьшем порядке теории возмущений имеет следующий вид:

$$\vec{F} = -q\vec{C} \times \vec{B} + O(\epsilon), \quad \vec{F} \cdot \vec{B} = O(\epsilon). \quad (3.34)$$

Это уравнение согласуется с допущениями, сделанными в начале § 3.1. Действительно, в соответствии с этими допущениями продольная компонента  $\vec{F}$  должна быть достаточно малой, так как чрезмерно большие ускорения и скорости вдоль  $\vec{B}$  могут привести к нарушению условия (3.2). Отметим далее, что, согласно первому из выражений (3.34), поперечная компонента силы  $\vec{F}_\perp$  должна иметь такой же порядок малости, как и поперечная дрейфовая скорость. Будет ли  $\vec{F}_\perp$  величиной нулевого или первого порядка малости, зависит от конкретных условий рассматриваемой задачи. Если  $\vec{F}_\perp$  оказывается величиной нулевого порядка, то следует иметь в виду, что согласно разделу 1.1, такое поле будет давать существенный вклад в инерционный дрейф (3.25).

Умножая скалярно уравнение (3.32) и (3.33) на  $\vec{B}$ , а уравнение (3.32) на  $\vec{S}_1$ , получаем

$$\vec{C}_1 \cdot \vec{B} = O(\epsilon), \quad \vec{S}_1 \cdot \vec{B} = O(\epsilon), \quad \vec{C}_1 \cdot \vec{S}_1 = O(\epsilon). \quad (3.35)$$

Здесь  $\dot{\phi}$  не может быть величиной первого или более высокого порядка по  $\epsilon$ , поскольку в этом случае разложение (3.6) не имело бы смысла. Полученный результат показывает, что в первом приближении вращение можно описать двумя векторами  $\vec{C}_1$  и  $\vec{S}_1$ , перпендикулярными друг другу и магнитному полю. Кроме того, разность между скалярными произведениями уравнения (3.32) на  $\vec{C}_1$  и уравнения (3.33) на  $\vec{S}_1$  после некоторых преобразований можно представить в следующем виде:

$$C_1^2 = S_1^2 + O(\epsilon). \quad (3.36)$$

Таким образом, в этом приближении векторы  $\vec{C}_1$  и  $\vec{S}_1$  имеют равные модули. Наконец, комбинируя уравнения (3.32) и (3.33), получаем

$$\dot{\vartheta} = B + O(\varepsilon), \quad (3.37)$$

что полностью согласуется с основными допущениями. В действительности, члены более высокого порядка в  $\dot{\vartheta}$  можно выбирать произвольно, необходимо лишь, чтобы они соответствовали высшим приближениям величин  $\vec{C}_v$  и  $\vec{S}_v$  в выражении (3.6).

Таким образом получим вращение частицы в первом приближении

$$\vec{a} = \varepsilon \vec{C}_1 \cos \omega_g t + \varepsilon \vec{S}_1 \sin \omega_g t + O(\varepsilon), \quad (3.38)$$

где по аналогии с решением (2.80) для движения в однородном магнитном поле имеем

$$\varepsilon \vec{C}_1 = \frac{\widehat{B} \times \vec{W}_0}{\omega_g}, \quad \varepsilon \vec{S}_1 = \frac{\vec{W}_0}{\omega_g}. \quad (3.39)$$

Все это подтверждает справедливость допущений, сделанных при выводе первого приближения теории возмущений.

Выражение (3.31) представляет собой уравнение движения ведущего центра, выведенное с точностью до величин второго порядка малости. В частном случае, когда силовое поле  $\vec{F}$  изменяется в пространстве значительно быстрее магнитного поля  $\vec{B}$ , в уравнении можно сохранить только члены второго порядка, связанные с  $\vec{F}$ . Такая ситуация имеет место, если характерный пространственный масштаб электрического поля много меньше характерного пространственного масштаба магнитного поля, в котором находится плазма. Тогда при помощи уравнений (3.38) и (3.39) получим

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = \left(1 + \frac{1}{4} a^2 \nabla_{\perp}^2\right) \vec{F} + q\vec{u} \times \vec{B} - M \vec{\nabla} B + O(\varepsilon^2 B) + O(\varepsilon^2), \quad (3.40)$$

где  $M = mW_0^2/2B$  — эквивалентный магнитный момент, а символ  $O(\epsilon^2 B)$  обозначает члены второго порядка малости, в которые входят производные от  $\vec{B}$ . Появление в уравнении (3.40) дополнительного слагаемого  $1/4 a^2 \nabla_{\perp}^2 \vec{F}$  связано с тем, что частица, вращающаяся в неоднородном поле  $\vec{F}$ , испытывает действие средней силы, которая несколько отличается от силы  $\vec{F}_c$  в точке, где находится центр вращения. При этом на ионы и электроны действуют разные по величине силы, если только ларморовские радиусы ионов и электронов не равны между собой [72]. В двумерном случае величина  $\nabla_{\perp}^2 \vec{F} = -\vec{\nabla} (\nabla_{\perp}^2 \phi)$  отлична от нуля только тогда, когда имеются электрические пространственные заряды.

В заключение отметим, что при использовании приближений, в которых отбрасываются члены выше некоторого порядка по параметру  $\epsilon$ , необходимо соблюдать предельную осторожность, так как разделение зарядов иногда проявляется лишь при учете членов более высокого порядка малости, а члены низшего порядка не приводят к такому эффекту. Это в равной степени применимо к уравнениям движения ведущего центра и к микроскопическим уравнениям движения ионизованного вещества, которые будут выведены в следующем параграфе и в гл. 5. Относительная роль различных членов в этих уравнениях определяется не только их порядком по  $\epsilon$ , но также математической формой и физическими явлениями, которые они описывают. Типичным примером является поляризационный дрейф (3.27), который в уравнении (3.22) оказывается величиной порядка  $\epsilon$  и в то же время дает вклад, сравнимый с электрическим дрейфом (3.26). Поляризационный дрейф приводит к разделению зарядов, тогда как и электрический дрейф не дает такого эффекта. Пренебрежение поляризационным дрейфом оправдано только до тех пор, пока дрейфовая теория первого порядка строится для частицы, находящейся в вакууме. Однако в плотной плазме разделение зарядов играет основную роль, и такое приближение неприменимо. Другим примером может служить член второго порядка в уравнении (3.40), связанный с

силой  $\vec{F}$ , который имеет разные значения для ионов и электронов и может привести при некоторых условиях к разделению зарядов. В гл. 8 будут рассмотрены еще два примера того, как члены высших порядков существенно влияют на конечные результаты.

### § 3. 2. ПОТОК ЧАСТИЦ И ТОКИ

Движение ведущего центра — это только часть полного движения заряженной частицы. При вычислении потоков вещества, импульса и энергии следует учитывать не только поток ведущих центров, но также и эффекты, связанные с вращением частиц. Это оказывается существенным, когда движение вызывается электромагнитными и механическими силами, которые действуют на элемент объема ионизованного вещества. Теперь, исходя из картины движения отдельных частиц, получим интересные нас потоки. Ограничимся первым порядком теории возмущений и рассмотрим движение частиц через некоторый элемент поверхности.

Полный поток частиц, распределенных в пространстве с плотностью  $n$ , через участок поверхности  $S$  равен

$$\Psi = \iint_S n \vec{n} \omega dS = \iint_S n \vec{n} (\vec{u} + \vec{W}) dS \equiv \Psi_u + \Psi_w, \quad (3.41)$$

где  $\Psi_u$  и  $\Psi_w$  — вклады от дрейфового движения ведущих центров и от вращения, а  $\vec{u}$  и  $\vec{W}$  определены уравнениями (3.9) и (3.6). Из рис. 3.4, видно, что в  $\Psi_w$  вносят вклад те частицы, которые на протяжении ларморовского периода пересекают поверхность  $S$  только один раз [73]. Такие частицы расположены внутри трубки, ось которой совпадает с границей  $G$  поверхности  $S$ , а радиус равен ларморовскому радиусу частицы. Каждая частица внутри этого объема  $\omega g/2\pi$  ежесекундно пересекает поверхность  $S$ . Выберем в качестве элемента

объема небольшой диск площадью  $\pi a^2$  и толщиной  $\vec{B} d\vec{l}$ . Здесь  $\vec{a}$  — радиус вращения, а  $d\vec{l}$  — линейный элемент контура  $C$ . Эти элементы объема содержат все частицы, пересекающие поверхность  $S$  только один раз в те-

чение ларморовского периода. Выбирая положительное направление так, как это показано на рис. 3.4, и вводя магнитный момент согласно уравнению (2.83), получаем в первом приближении

$$\begin{aligned}\Psi_w &= - \oint_C \left( \frac{n\omega_g}{2\pi} \right) \pi a^2 \widehat{\mathbf{B}} d\mathbf{l} = \frac{1}{q} \oint_C n \vec{\mathbf{M}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \\ &= \iint_S \vec{\mathbf{n}} \operatorname{rot} \left( \frac{n \vec{\mathbf{M}}}{q} \right) dS.\end{aligned}\quad (3.42)$$

Таким образом можно определить макроскопическую скорость  $\vec{\mathbf{v}}$  (скорость единицы массы), которая описывает средний поток частиц через единицу поверхности и определяется в том же приближении как

$$\vec{\mathbf{n}}\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{n}}\vec{\mathbf{u}} + \operatorname{rot} \left( \frac{n \vec{\mathbf{M}}}{q} \right).\quad (3.43)$$

Левая часть уравнения (3.43) дает полную плотность тока частиц и является суммой плотностей полного дрейфового тока и тока намагничивания, которые определяются соответственно первым и вторым членами в правой части уравнения (3.43).

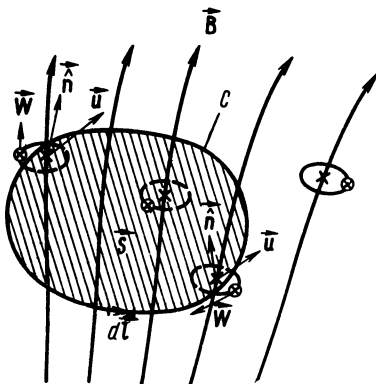


Рис. 3.4. Полный поток частиц через поверхность  $S$  — это сумма потока ведущих центров  $\Psi_u$  и вклада от скорости вращения  $\Psi_w$  [74].

В действительности, распределение частиц по скоростям, а следовательно, и распределение значений  $a^2$  непрерывны. Поэтому поток частиц, пропорциональный в каждой точке пространства  $a^2$ , следует проинтегрировать по распределению скоростей. Разумеется, мы можем повторить те же рассуждения для любого интервала изменения величина  $a^2 = W^2/\omega_g^2$  между  $a^2$  и  $a^2 + d(a^2)$ . В результате получим соотношения типа (3.42), (3.43) и (3.24), в которых величины  $M$ ,  $W^2$  и  $u_{||}^2$  заменены

их средними значениями  $\overline{M}$ ,  $\overline{W^2}$  и  $\overline{u_{\parallel}^2}$  по пространству скоростей.

Отметим еще раз, что  $W^2$  и  $u_{\parallel}^2$  не интегралы движения частицы. Следовательно, при движении частицы  $\overline{W^2}$  и  $\overline{u_{\parallel}^2}$  могут изменяться как в пространстве, так и во времени.

Запишем теперь при помощи уравнений (3.43) и (3.22) явное выражение для плотности потока  $\vec{n}\vec{v}$  некоторого сорта частиц. Пользуясь векторными тождествами, получим

$$\begin{aligned} \vec{n}\vec{v} &= \vec{n}\vec{u}_{\parallel} + \vec{n}\vec{u}_{\perp} - \text{rot} \left( \frac{nm\overline{W^2}\vec{B}}{2qB^2} \right) = \\ &= \vec{n}\vec{u}_{\parallel} + \frac{n\vec{F} \times \vec{B}}{qB^2} + \frac{nm(\overline{W^2} - 2\overline{u_{\parallel}^2})\vec{\nabla}B \times \vec{B}}{2qB^2} + \\ &+ \frac{nm\left(u_{\parallel}^2 - \frac{1}{2}\overline{W^2}\right)(\text{rot}\vec{B})_{\perp}}{qB^2} - \frac{nm\left(\frac{d\vec{u}_{\perp}}{dt}\right) \times \vec{B}}{qB^2} - \\ &- \frac{\frac{1}{2}nm\overline{W^2}(\text{rot}\vec{B})_{\parallel}}{qB^2} - \frac{\vec{\nabla}(nm\overline{W^2}) \times \vec{B}}{2qB^2}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Здесь введено обозначение  $\vec{u}_{\parallel} = \vec{u}_{\parallel} + \vec{\tilde{u}}_{\parallel}$ , где  $\vec{u}_{\parallel}$  — средняя продольная дрейфовая скорость частиц в данной точке пространства, а  $\vec{\tilde{u}}_{\parallel}$  — «тепловая» часть продольной дрейфовой скорости. Для функций распределения симметричных в пространстве скоростей  $\vec{u}_{\parallel}$  относительно точки  $\vec{\tilde{u}} = 0$ , например при максвелловском распределении имеем  $\left(\vec{\tilde{u}}_{\parallel} \cdot \vec{u}_{\parallel}\right) = 0$ . Введем средние кинетические энергии

$$K_{\parallel} = \frac{1}{2} \overline{m\vec{u}_{\parallel}^2} = \frac{1}{2} m (\overline{u_{\parallel}^2} + \overline{\tilde{u}_{\parallel}^2}), \quad K_{\perp} = \frac{1}{2} m\overline{W^2} \quad (3.45)$$

соответственно для продольного движения и вращения частицы.



Поскольку в большинстве случаев тепловое движение значительно более быстрое, чем среднее движение, то  $\vec{u}_{\parallel}^2 \ll \vec{u}_{\perp}^2$  и  $K_{\parallel}$  и  $K_{\perp}$  — соответственно продольная и поперечная «температуры» частиц.

Следует отметить, что приведенное выше определение локальных значений средней кинетической энергии имеет смысл только в том случае, когда продольный и поперечный дрейфы частиц являются медленными по сравнению со скоростью изменения функции распределения частиц по скоростям. Таким образом, чтобы иметь возможность определить среднее значение (3.45), необходимо допустить, что благодаря столкновению частиц различные части функции распределения по скоростям тесно связаны друг с другом. При этом, однако, диссипация в системе должна практически отсутствовать. В ряде случаев это утверждение означает, что благодаря столкновению устанавливается почти максвелловское распределение частиц по скоростям и в то же время можно пренебречь омической и вязкой диссипациями.

Пользуясь введенными выше обозначениями, уравнение (3.44) запишем в следующем виде:

$$n\vec{v}_{\parallel} = n\vec{u}_{\parallel} - \frac{nK_{\perp}(\text{rot } \vec{B})_{\parallel}}{qB^2} \quad (3.46)$$

и

$$\begin{aligned} \vec{n}\vec{v}_{\perp} = & \frac{n\vec{F} \times \vec{B}}{qB^2} + \frac{n(K_{\perp} - 2K_{\parallel})(\nabla \vec{B} - \hat{B} \times \text{rot } \vec{B}) \times \vec{B}}{qB^3} - \\ & - \frac{\nabla(nK_{\perp}) \times \vec{B}}{qB^2} - \frac{nm \frac{d\vec{u}_{\perp}}{dt} \times \vec{B}}{qB^2}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Эти уравнения получены в первом порядке дрейфовой теории. Поэтому при рассмотрении эффектов, для которых существенны члены более высокого порядка по  $\epsilon$ , ими следует пользоваться с осторожностью. В частности, это относится к инерционным членам. Для более точного вычисления полного потока частиц необходимо применять выражения, учитывающие вклады более высокого порядка не только от движения веду-

щих центров, но также и от ларморовского вращения. Дальнейшее рассмотрение этой проблемы продолжено в § 2 гл. 5.

Следует отметить, что продольный поток частиц определяется не только вкладом  $n\vec{u}_\perp$  от дрейфового движения ведущих центров. В выражении (3.46) содержится также вклад от вращения, который обусловлен кривизной магнитных силовых линий. Интересно, что в том случае, когда распределение по скоростям изотропно и  $K_\perp = 2K_\parallel$ , в поперечном потоке (3.47) исчезает вклад, обусловленный пространственными изменениями магнитного поля.

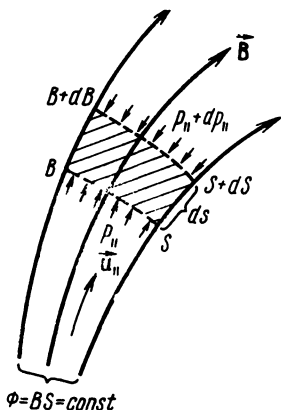


Рис. 3.5. Элемент объема толщиной  $ds$ , ограниченный двумя поверхностями, площади которых равны  $S$  и  $S+dS$ . Эти поверхности перпендикулярны магнитному полю.

Мы изучали условия равновесия в продольном направлении. Теперь рассмотрим элемент объема толщиной  $ds$ , который ограничен двумя поверхностями  $S$  и  $S+dS$  (рис. 3.5), перпендикулярными силовым линиям магнитного поля, причем через них проходит один и тот же магнитный поток  $\Phi = BS$ . Согласно уравнению (3.17), частицы, находящиеся внутри этого элемента объема, испытывают в продольном направлении действие

объемной силы  $n\vec{F} \cdot \vec{B} - n\vec{M}(\vec{B} \cdot \nabla)B$ . Кроме того, в том же направлении на каждую из ограничивающих поверхностей действует сила давления  $2nK_\parallel S = \rho_\parallel S$ . При этом полная сила, действующая на элемент объема, уравновешивается продольной силой инерции полного потока массы. Таким образом,

$$nm \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right]_\parallel S ds = n [\vec{F} \cdot \vec{B} - M(\vec{B} \cdot \nabla)B] S ds - \frac{\partial}{\partial s} (2nK_\parallel S) ds. \quad (3.48)$$

Используя соотношение  $S = \Phi/B = \text{const}/B$  и определение  $M$ , получим следующее уравнение для потока массы в продольном направлении:

$$nm \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right]_{\parallel} = n \vec{F}_{\parallel} - \frac{n}{B} (K_{\perp} - 2K_{\parallel}) \nabla_{\parallel} B - \nabla_{\parallel} (2nK_{\parallel}). \quad (3.49)$$

В гл. 5 подробно исследована связь уравнений (3.47) и (3.49) с макроскопической теорией.

В заключение рассмотрим частный случай, когда кинетические энергии  $K_{\parallel}$  и  $K_{\perp}$  настолько малы, что следует учитывать только инерционный дрейф, возникающий за счет электрического  $u_E$ . В линейном приближении можно полагать  $\vec{\partial} u_E / \partial t = \vec{\partial} u_E / dt$ . Тогда для плазмы, состоящей из электронов и ионов, плотность электрического тока можно записать в виде

$$\vec{j} = \vec{j}_{\parallel} + \vec{j}_{\perp} \approx en_i (\vec{u}_{\parallel i} + \vec{u}_E) - en_e (\vec{u}_{\parallel e} + \vec{u}_E) + \epsilon_{eq} \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial t}, \quad (3.50)$$

где

$$\epsilon_{eq} = \frac{n_i m_i + n_e m_e}{B^2}. \quad (3.51)$$

Если выражение (3.50) для плотности тока подставить в уравнение (2.2), то легко видеть, что плазма ведет себя подобно анизотропной диэлектрической среде с диэлектрическими постоянными  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_0 + \epsilon_{eq}$  соответственно в продольном и поперечном направлениях. Этот результат не является общим и справедлив лишь при малой тепловой энергии частиц. Таким образом, поведение плазмы далеко не всегда можно описывать просто заменой  $\epsilon_0$  суммой  $\epsilon_0 + \epsilon_{eq}$  в поперечной составляющей уравнения (2.2). При этом в каждом частном случае необходимо детальное рассмотрение, которое показало бы справедливость такой замены. Особое внимание следует уделить явлениям разделения зарядов.

В отдельных частных случаях (например, для элементарных плоских волн), когда нет необходимости за-

писывать уравнения движения плазмы в общем виде, можно связать  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  соотношением, подобным (2.2). Тогда  $\epsilon_0$  заменяется диэлектрическим тензором, который является функцией частоты волны  $\omega$  [21]. Поскольку вид тензора зависит от свойств рассматриваемого волнового движения, то его компоненты не являются уже обычными константами, подобными (3.51), которые определяются только плотностью массы и напряженностью магнитного поля  $B$ .

### § 3.3. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМУЛИРОВКА ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЕДУЩЕГО ЦЕНТРА

До сих пор мы применяли теорию возмущений непосредственно к уравнению движения частицы. Исходным пунктом для построения теории движения частицы, которое является по существу вращением вокруг силовых линий, наложенным на дрейф ведущего центра, может также служить гамильтонов формализм [74, 75].

Рассмотрим [74] движение заряженной частицы в электрическом поле  $\vec{E}$  и в магнитном поле  $\vec{B}$ , которое нигде не обращается в нуль. Допустим, что продольная компонента  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  — величина первого порядка малости по  $\epsilon$ . Здесь  $\epsilon$  представляет собой безразмерный малый параметр. Этим параметром может быть отношение ларморовского радиуса к характерным пространственным масштабам электромагнитного поля или же отношение циклотронного периода  $2\pi/\omega_g$  к характерному времени изменения того же поля. Таким образом, в рассматриваемом подходе накладываются по существу те же ограничения (3.1) и (3.2), что и при построении дрейфовой теории. Поскольку поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  медленно изменяются в пространстве и во времени, потенциалы  $\vec{A}$  и  $\varphi$ , определяемые соотношениями (2.8), (2.10) и (2.21), можно записать следующим образом

$$q\vec{A}(\vec{\rho}, t) = \left(\frac{q}{\epsilon}\right) \vec{A}'(\epsilon\vec{\rho}, \epsilon t) = \frac{1}{\epsilon} \alpha \nabla \beta, \quad (3.52)$$

$$\varphi(\vec{\rho}, t) = \frac{1}{\epsilon} \varphi'(\epsilon\vec{\rho}, \epsilon t). \quad (3.53)$$

Здесь использована калибровка  $\vec{\nabla} \chi = 0$  в уравнении (2.21). По сравнению с гл. 2 введенные здесь определения несколько модифицированы в том отношении, что множитель  $q$  включен в  $\alpha \nabla \beta$  и скалярные величины  $\alpha$  и  $\beta$  считаются теперь функциями  $\vec{e}r$  и  $\epsilon t$ . Поскольку  $\epsilon$  мало по сравнению с единицей, то относительные пространственно-временные изменения величин  $\vec{A}$  и  $\Phi$ , а следовательно,  $\vec{E}$  и  $B$  можно получить непосредственно из выражений (3.52) и (3.53). Сюда легко может быть включено также и гравитационное поле, описываемое потенциалом  $\Phi_g$ , но для простоты оно рассматриваться не будет.

Если в качестве обобщенных координат выбирают прямоугольные координаты  $x_k$ , а соответствующие импульсы  $p_k$  определяются соотношением (2.61), то скорость частицы  $\vec{w}$  можно записать в виде

$$m\vec{w} = \vec{p} - \left(\frac{q}{\epsilon}\right) \vec{A}', \quad (3.54)$$

и гамильтониан (2.62)

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{\epsilon} \vec{A}'\right)^2 + \frac{q}{\epsilon} \Phi'. \quad (3.55)$$

Теперь при помощи канонического преобразования перейдем к новой системе обобщенных координат и импульсов  $(q_1, \dots, p_1)$ . В этом новом представлении движение должно разделиться на три части, которые соответствуют движению по ларморовской орбите со скоростью  $\vec{W}$ , а также движению со скоростями продольного и поперечного дрейфов  $\vec{u}_{\parallel}$  и  $\vec{u}_{\perp}$ , которые вычислены в первом порядке теории возмущений. Для этого воспользуемся производящей функцией конкретного вида, рассматриваемой в гл. 2,

$$G(x, y, z; p_1, p_2, p_3; t) = \frac{s}{\epsilon} p_2 + \frac{\beta}{\epsilon} p_1 + \frac{\alpha}{\epsilon} p_3 - p_1 p_3, \quad (3.56)$$

где  $s(\vec{e}r, \epsilon t)$  соответствует длине дуги, измеренной вдоль силовой линии магнитного поля. Нетрудно ви-

деть, что общие формулы канонического преобразования (2.58) приводят к следующим соотношениям:

$$\alpha = \varepsilon p_1 + \varepsilon q_3, \quad \beta = \varepsilon q_1 + \varepsilon p_3, \quad s = \varepsilon q_2, \quad (3.57)$$

$$\vec{p} - \frac{q}{\varepsilon} \vec{A}' = \varepsilon' (\nabla s) p_2 + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \alpha) p_3 - \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \beta) q_3, \quad (3.58)$$

и новый гамильтониан может быть записан в виде

$$\begin{aligned} H' = \frac{1}{\varepsilon} \left[ q\varphi' + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) (\varepsilon p_1) \right] - \frac{1}{2m} \left[ \frac{1}{\varepsilon} (\nabla s) p_2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \alpha) p_3 - \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \beta) q_3 \right]^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right) p_2 + \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) p_3. \right. \end{aligned} \quad (3.59)$$

При выводе этой формулы использованы соотношения (3.57), (3.58) и (3.52). Подставляя  $\varepsilon p_1$  из первого соотношения (3.57) в выражение (3.58), получаем

$$\begin{aligned} H' = \frac{1}{\varepsilon} \left[ q\varphi' + \frac{\alpha}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \right] + \frac{1}{2} m\omega^2 + \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} p_2 + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) p_3 - \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) q_3. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Заметим, что в новом представлении частица обладает тремя степенями свободы, которым соответствуют переменные  $(q_1, p_1)$ ,  $(q_2, p_2)$  и  $(q_3, p_3)$ .

Согласно соотношениям (3.58) и (3.54),  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $q_3$  по существу совпадают с компонентами скорости частицы, и поэтому являются величинами нулевого порядка малости, поскольку  $\left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial (\varepsilon x_k)}$ , а  $s$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  представляют собой геометрические координаты. При этом из соотношения (3.57) следует, что  $\varepsilon p_1$ ,  $\varepsilon q_1$ ,  $\varepsilon q_2$  — обычные геометрические координаты, а  $\varepsilon q_3$ ,  $\varepsilon p_3$  представляют собой малые (порядка  $\varepsilon$ ) отклонения от положения  $\alpha$ ,  $\beta$  в плоскости, перпендикулярной  $\vec{B}$ . Таким образом, в первом приближении канонические переменные  $(q_3, p_3)$  определяют скорость вращения  $\vec{W}$ . Переменные  $(\varepsilon q_2, p_2)$  соответствуют координате  $s$  и скорости  $\vec{u}_{\parallel}$  ведущего центра вдоль магнитного поля  $B$ .

Наконец  $(\epsilon q_1, \epsilon p_1)$  представляет собой положение ведущего центра на силовой линии и смещение его поперек  $\vec{B}$ . Три движения со скоростями  $\vec{W}$ ,  $\vec{u}_{\parallel}$  и  $\vec{u}_{\perp}$  соответствуют трем степеням свободы только в первом приближении; в более высоких приближениях эти движения связаны между собой. Как будет показано в следующей главе, появление такой связи обусловлено отклонениями от адиабатической инвариантности.

Полученному выражению (3.60) для гамильтониана частицы можно дать простую физическую интерпретацию. Поскольку  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $s$  определены для зависящего от времени магнитного поля, силовые линии подобны движущимся струнам, а частица «скользит» по ним, как бусинка по проволоке. При этом гамильтониан не совпадает с полной потенциальной энергией, связанной с работой электрического поля  $\vec{F}$ . Он будет содержать только работу таких сил, которые в новом представлении можно рассматривать как «внешние» или «приложенные». Таким образом исключается работа, обусловленная движением силовых линий, поскольку она теперь рассматривается как работа сил связи.

Различают два типа работы сил связи. Во-первых, вклад от поперечной составляющей силы существует только при смещении силовых линий в поперечном направлении, т. е. когда  $d\alpha/dt$  и  $d\beta/dt$  отличны от нуля. При этом поперечная компонента силы связи совершает работу, которая аналогична работе, совершаемой над бусинкой, скользящей по движущейся кривой неизменной формы. Во-вторых, работа может совершаться также в том случае, когда изменяется длина силовой линии и  $ds/dt$  отлично от нуля. При этом совершается такая же работа, как и над бусинкой, скользящей по упругой нити в форме окружности, радиус и длина которой изменяются во времени.

Для того чтобы связать эти физические представления с выражением (3.60), рассмотрим теперь полную работу  $q\vec{E}d\vec{l}$ , которую, согласно уравнению (2.23), совершает электрическое поле. В принятых обозначениях один из членов в выражении, определяющем эту работу, равен  $(1/s^2)(d\beta/dt)(\vec{\nabla}\alpha)d\vec{l} - (1/\epsilon^2)(d\alpha/dt)(\vec{\nabla}\beta)d\vec{l}$ . Согласно соотношению (3.57), каждый из градиентов  $\alpha$  и  $\beta$  можно разделить на две составляющие: одна

связана с переменными  $q_3, p_3$ , а вторая — с  $q_1, p_1$ . Появление последней составляющей обусловлено главным образом дрейфовым движением частиц поперек магнитного поля и поэтому определяет работу поперечной составляющей силы связи.

Поскольку  $(1/\varepsilon)(\partial s/\partial t)$  описывает скорость изменения длины дуги вдоль  $\vec{B}$ , а  $p_2/m$  — продольную скорость, работу продольной компоненты этих сил можно записать в виде  $(1/\varepsilon) - (\partial s/\partial t) \cdot p_2$ . Таким образом, чтобы получить гамильтониан из энергии, соответствующей интегралу от  $-\vec{E}d\vec{l}$ , необходимо выделить работы поперечной и продольной составляющих сил связи и сложить их с кинетической энергией  $1/2 m \omega^2$ . Это приводит к выражению типа (3.60), где последние два члена описывают часть  $(\partial\beta/\partial t)\vec{\nabla}\alpha - (\partial\alpha/\partial t)\vec{\nabla}\beta$ , которая остается после выделения работы поперечной и продольной составляющих сил связи.

В соотношении (3.60) коэффициенты выражены  $(q_1, q_2, q_3; p_1, p_2, p_3)$  при помощи формул (3.57) и подстановки  $\alpha = \varepsilon p_1, \beta = \varepsilon q_1$  и  $s = \varepsilon q_2$ . Разложим теперь  $H'$  по степеням  $q_3, p_3$ , поскольку в соотношениях (3.57) члены, содержащие  $\varepsilon q_3, \varepsilon p_3$ , порядка  $\varepsilon$ , а величины  $\varepsilon q_1, \varepsilon p_1$  — порядка единицы. Тогда гамильтониан примет форму

$$H' = \frac{1}{\varepsilon} H_{-1} + H_0 + \varepsilon H_1 + \dots \quad (3.61)$$

Запишем в явном виде первые члены этого разложения

$$H_{-1} = q\varphi' + \frac{\alpha}{\varepsilon} \left( \frac{\partial\beta}{\partial t} \right) \quad (3.62)$$

и

$$H_0 = \frac{1}{2} m \left[ W_3^2 + \left( \frac{p_2}{m} \right)^2 + \frac{2p_2}{m\varepsilon} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \cdot \nabla s \right) - \frac{E^2}{B^2} \right]. \quad (3.63)$$

Здесь введено следующее обозначение:

$$\vec{W}_3 = \vec{\omega} - \left( \frac{p_2}{m} \right) \hat{B} - \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (3.64)$$



В первом приближении это выражение совпадает с выражением для скорости вращения, поскольку второе слагаемое в правой части выражения (3.64) соответствует  $\vec{u}_{\parallel}$ , а последнее, согласно уравнению (3.34), совпадает с  $\vec{u}_{\perp}$ .

В частном случае статического электромагнитного поля в выражении (3.60) члены, которые имеют явную зависимость от времени, обращаются в нуль. В первом порядке теории возмущений скорости можно определить из выражений (3.9), а магнитный момент  $M = mW^2/2B$  — из соотношения (2.83). Тогда преобразованный гамильтониан запишем в виде

$$H' = q\varphi + MB + \frac{1}{2}mu^2. \quad (3.65)$$

В гл. 4 покажем, что магнитный момент  $M$  в первом порядке теории возмущения является приближенным интегралом движения. Это означает, что в гамильтониане (3.65) отсутствует явная зависимость вращения от времени, и задача сводится к изучению только среднего движения ведущего центра. Второе слагаемое  $MB$  в гамильтониане (3.65) можно рассматривать как дополнительную потенциальную энергию. Эквивалентный потенциал  $MB$  оказывается существенным при отражении вращающейся частицы от магнитных пробок (см. гл. 2, 6 и 7). Выражение (3.65) для гамильтониана можно также получить из уравнения движения (3.16) для ведущего центра в медленно меняющемся электромагнитном поле. Уравнения (2.36) и (3.16) различаются только силой, связанной с  $-M\vec{\nabla}B$ .

В следующей главе показано, что канонические уравнения иногда можно определить и для среднего движения частиц, которые осциллируют между двумя магнитными зеркалами и одновременно дрейфуют вокруг конфигурации магнитного поля по почти замкнутым траекториям.

### АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Сложное движение заряженной частицы довольно часто можно с хорошей точностью описать суперпозицией дрейфового движения и вращения (см. гл. 3). Оба эти движения медленно изменяются на протяжении ларморовского периода. В действительности поведение частицы характеризуется несколькими величинами, которые изменяются настолько медленно, что приближенно могут считаться постоянными. Они не являются точными интегралами движения, но при бесконечно медленном изменении внешних параметров приближаются к постоянным значениям. Величины, которые ведут себя подобным образом, называют адиабатическими инвариантами. Ниже будет показано, что эти инварианты, определенные для отдельной частицы, непосредственно связаны с адиабатическим сжатием ионизованного вещества в магнитном поле.

#### § 4. 1. ТЕОРИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Адиабатическая инвариантность эквивалентного магнитного момента вращающейся частицы была впервые установлена Альфвеном [9, 10] занимавшимся изучением полярных сияний и космических лучей. Для объяснения происхождения частиц высоких энергий в космических лучах Ферми [76] предложил механизм ускорения, в котором частицы движутся вдоль силовых линий магнитного поля, попеременно отражаясь от двух сближающихся магнитных зеркал. Как будет показано в разделе 1.3, этот механизм связан с продольным инвариантом, впервые введенным Розенблютом [77], а затем исследовавшимся Нортропом и Теллером [78]. Для изучения поясов Ван Аллена в магнитном поле Земли Нортроп и Теллер ввели также понятие потокового инварианта. Этот инвариант связан с магнитным потоком, заключенным внутри траектории дви-

жения ведущего центра. Он определяется условиями сохранения потока и свойством «вмороженности» магнитного поля в ионизованное вещество.

## 1. 1. Общее рассмотрение

Прежде чем перейти к детальному анализу, попытаемся дать простую физическую интерпретацию трем упомянутым адиабатическим инвариантам.

Согласно уравнениям (3.6) и (3.9), в первом приближении частица вращается по ларморовской окружности со скоростью  $\vec{W}$  и дрейфует как  $\vec{a}$  вдоль, так и поперек магнитного поля со скоростями  $\vec{u}_{\parallel}$  и  $\vec{u}_{\perp}$  соответственно. Положение частицы задается вектором  $\vec{\rho}$ , а центр вращения — вектором  $\vec{C}$ ; тогда  $\vec{a} = \vec{\rho} - \vec{C}$  представляет собой вектор, связанный с ларморовским вращением.

Существуют, по крайней мере, три периодических движения, которые частица может одновременно совершать в магнитном поле, приведенном на рис. 4.1. Во-первых, как показано на рис. 4.1, а, частица вращается вокруг силовых линий со скоростью  $\vec{W}$  и с циклотронным периодом  $t_g = 2\pi/|\omega_g|$ . Во-вторых, она может осциллировать между двумя магнитными зеркалами со скоростью  $\vec{u}_{\parallel}$  и с периодом  $t_{\parallel}$  (см. рис. 4.1, б). Наконец, в магнитном поле соответствующей конфигурации траектория поперечного дрейфа может оказаться замкнутой. При этом частица будет вращаться вокруг всей конфигурации с дрейфовой скоростью  $\vec{u}_{\perp}$  и с периодом  $t_{\perp}$  (см. рис. 4.1, в). Обычно  $t_g \ll t_{\parallel} \ll t_{\perp}$ .

Из простых физических соображений следует, что с этими тремя движениями связаны три адиабатических инварианта. Движение, изображенное на рис. 4.1, а, аналогично движению точечной массы, прикрепленной к проволоке. Эта масса вращается вокруг оси на расстоянии, равном радиусу вращения  $a$ . Натяжение проволоки соответствует силе, создаваемой магнитным полем. Пусть радиус  $a$  медленно изменяется, а диссипация в системе отсутствует. Тогда из закона

сохранения момента количества движения следует, что  $mWa = mWt_g/2\pi$  должно быть постоянным. Следовательно, на основании уравнений (2.81) и (2.83) можно утверждать, что эквивалентный момент  $M$  также должен оставаться постоянным.

Термодинамическое рассмотрение приводит к такому же выводу. Действительно, пусть  $W$  описывает тепловое движение, соответствующее температуре

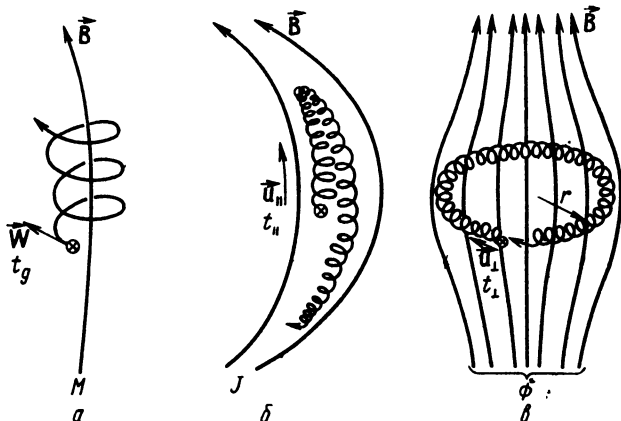


Рис. 4.1. Периодические движения заряженной частицы в магнитном поле:

*a* — вращение вокруг силовых линий со скоростью  $W$  и цикло-  
гронным периодом  $t_g = 2\pi/|\omega_g|$ ; *b* — колебания вдоль силовых  
линий между магнитными зеркалами со скоростью  $u_{\parallel}$  и перио-  
дом  $t_{\parallel}$ ; *в* — дрейф поперек силовых линий вокруг configura-  
ции как целого со скоростью  $u_{\perp}$  и периодом  $t_{\perp}$ .

$T = mW^2/2k$  газа частиц, имеющего плотность  $n$ . В отсутствие диссипации медленное изменение радиуса соответствует двумерному адиабатическому сжатию или расширению. При этом плотность  $n$  пропорциональна как  $1/a^2$ , так и  $T$ . Это означает, что  $W^2/B$  и  $M$  должны быть постоянными.

Можно, наконец, предположить, что вместо вращающейся частицы имеется гибкое сверхпроводящее кольцо с током, которое охватывает магнитный поток, равный  $\pi a^2 B$ . Когда радиус  $a$  и магнитное поле  $B$  медленно изменяются во времени, индуцированные электрические токи сохраняют конечное значение только

в том случае, если электродвижущая сила обращается в нуль, а  $a^2B$  и  $M$  остаются неизменными. В разделе 1.2 этой главы доказывается постоянство  $M$  в первом порядке теории возмущений.

Далее, когда поперечный дрейф от одной силовой линии к другой оказывается медленным по сравнению с продольными колебаниями, движение, изображенное на рис. 4.1 б, напоминает движение упругого мяча, который попеременно отскакивает от двух движущихся навстречу друг другу поршней. Такими поршнями служат в данном случае магнитные пробки. Их движение возникает благодаря изменениям магнитного поля в пространстве и во времени, которые воспринимаются дрейфующей и осциллирующей частицей. Баланс импульса, как видно из рис. 4.4, б, приводит к постоянству величины  $u_{\parallel}^2 t_{\parallel}$ . Этого следовало также ожидать из термодинамических соображений. Действительно, рассмотрим одномерное сжатие или расширение газа в направлении силовых линий магнитного поля. Если температуру полсжить равной  $T = mu_{\parallel}^2/k$ , то адиабатичность изменения состояния означает, что плотность должна быть пропорциональной как  $(u_{\parallel} t_{\parallel})^{-1}$ , так и  $T^{1/2}$ . Отсюда следует, что величина  $u_{\parallel}^2 t_{\parallel} = u_{\parallel} (u_{\parallel} t_{\parallel})$  остается постоянной ( $u_{\parallel} t_{\parallel}$  — удвоенное расстояние между магнитными зеркалами, см. рис. 4.4).

Введем наконец для движения, схематически изображенного на рис. 4.1, в, цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$  с осью  $z$ , направленной вдоль оси симметрии. Допустим для простоты, что частица не имеет компоненты скорости вдоль силовых линий магнитного поля и движется в «экваториальной» плоскости так, что все магнитные силовые линии параллельны оси  $z$ . Тогда в отсутствие поля внешних сил и при  $\vec{V} = \text{rot } \vec{A}$  радиальная дрейфовая скорость в нулевом приближении оказывается равной  $u_r = -(1/B) (\partial A_{\varphi} / \partial t)$ . В том случае когда магнитное поле изменяется во времени, поверхности постоянного потока  $\Phi = 2\pi r A_{\varphi} = \text{const}$  движутся в радиальном направлении экваториальной плоскости и  $(\frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r}) \Phi$  обращается в нуль. Это означает, что поток  $\Phi$ , охватываемый траекторией частицы, для достаточно медленных изменений поля оказывается по-

стоянным, при этом траектория дрейфового движения ведет себя подобно гибкому сверхпроводнику кольцеобразной формы, радиус которого изменяется таким образом, чтобы индуцированная электродвижущая сила по периметру этого кольца равнялась нулю.

Для более подробного анализа воспользуемся интегралами действия, рассмотренными в гл. 2. В случаях, изображенных на рис. 4.1, полное движение частицы имеет три степени свободы и представляет собой вращение со скоростью  $\vec{W}$  по ларморовской окружности, а также продольное и поперечное движения со скоростями  $\vec{u}_{\parallel}$  и  $\vec{u}_{\perp}$  соответственно. В низшем порядке теории возмущений эти движения описываются также каноническими координатами  $(q_3, p_3)$ ,  $(\epsilon q_2, p_2)$  и  $(\epsilon q_1, p_1)$ , введенными в гл. 3. В первую очередь следует усреднить гамильтониан по быстрым вращениям частицы. В результате получаем гамильтониан, описывающий движение частицы с двумя степенями свободы, которые соответствуют продольному и поперечному дрейфам ведущего центра, а магнитный момент  $M$  будет входить в гамильтониан как параметр. Следующий этап — усреднение по продольному движению этой системы. При этом получаем новую систему, обладающую гамильтонианом с одной степенью свободы. Он описывает средний поперечный дрейф ведущего центра и содержит в качестве параметров  $M$  и  $J$ . И, наконец, можно усреднить по поперечному дрейфу вокруг конфигурации (см. рис. 4.1, в). В этом случае константой движения оказывается магнитный поток  $\Phi$ , охватываемый траекторией этого дрейфа.

Рассмотрим, во-первых, полную скорость  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{W}$  частицы в электромагнитном поле произвольной формы. Обобщенный импульс (2.61) можно записать в виде

$$\vec{p} = m(\vec{u} + \vec{W}) + q\vec{A}. \quad (4.1)$$

Рассматриваемое движение является почти периодическим и может быть изучено при помощи метода, развитого Крускалом [45, 46] и описанного в гл. 2. Что касается вращения, то как показано в гл. 2, следует рассматривать обобщенные импульсы и пространственные

координаты. Эти координаты одновременно с периодической временной зависимостью, задаваемой функцией  $\vartheta(t)$ , имеют явную медленную зависимость от времени, характерный временной масштаб которой не соизмерим с периодами системы. Функция  $\vartheta$ , как следует из уравнений (3.6) и (3.37), связана с частотой вращения. Временную зависимость можно выбрать в виде (2.64) с  $\mathbf{H} = \vartheta$ , поскольку, как показали Берковиц и Гарднер [70], точное решение уравнения движения можно выразить при помощи разложения (3.6).

Следовательно, интеграл действия (2.71) можно представить в виде

$$J^* = \oint [m(\vec{W} + \vec{u}) + q\vec{A}]_t \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\vec{C} + \vec{a})_t d\vartheta = \text{const}, \quad (4.2)$$

где  $\vec{W} = d\vec{a}/dt$ ,  $\vec{u} = d\vec{C}/dt$ . Время  $t$  можно считать постоянным всюду, где оно встречается явно. При этом следует отметить, что  $\vec{u}$  и  $\vec{C}$  не зависят от  $\vartheta$ .

Оценим теперь интеграл действия (4.2) с точностью до членов первого порядка по параметру  $\epsilon$ . Так как величины  $\vec{u}$  и  $\vec{A}$  незначительно изменяются за период  $t_g$ , получим

$$J^* = \oint m \left[ \vec{W} \frac{\partial \vec{a}}{\partial \vartheta} \right]_t d\vartheta = m \oint \vec{W} d\vec{a} = m \int_0^{t_g} W^2 dt. \quad (4.3)$$

Это непосредственно следует из соотношения  $d\vec{a} = (\partial \vec{a} / \partial \vartheta) d\vartheta$ , в котором время  $t$  следует считать постоянным всюду, где оно встречается явно. Воспользовавшись тем, что  $\vec{W} = d\vec{a}/dt$  и  $W^2$  мало изменяется за один ларморовский период, получим

$$J^* \approx mW^2 t_g \approx \text{const}, \quad (4.4)$$

где период обращения частицы по ларморовской орбите равен  $t_g = 2\pi m / |q|B$ . Воспользовавшись определением эквивалентного магнитного момента  $M = mW^2/2B$ , нетрудно убедиться, что при движении частицы  $M$  оказывается приблизительно постоянным

$$M \approx \frac{|c|}{4\pi m} J^* \approx \frac{|q|}{4\pi} W^2 t_g \approx \text{const}. \quad (4.5)$$

Приведенное выше доказательство постоянства величины  $M$  основано на исследовании истинной траектории движения частицы и тех осцилляций, которые возникают при ларморовском вращении частицы. Можно было бы попытаться развить аналогичный подход для продольных колебаний частицы, среднее движение которой показано на рис. 4.1, б. Однако в этом случае такой подход не имеет надежного обоснования. Для того чтобы можно было изучать такое движение при помощи интеграла действия в форме (2.71), нужно предположить, что  $\Theta$  теперь связана с частотой периодического продольного движения  $\dot{\vartheta}_{\parallel} = 2\pi/t_{\parallel}$ . Однако в отличие от исследованного ранее ларморовского вращения частицы при продольном движении нельзя пользоваться разложением по величине  $\dot{\vartheta}_{\parallel}$ , которое аналогично разложению (3.6) относительно величины  $\dot{\vartheta}$ . Предположим [77], что вращающаяся частица будет двигаться взад и вперед вдоль магнитной силовой линии, возвращаясь после одного «периода»  $t_{\parallel}$  почти к своему первоначальному состоянию. Другими словами, предположим, что ларморовский радиус и период обращения по ларморовской орбите очень малы по сравнению с характерными масштабами изменения электромагнитного поля в пространстве и времени. Для этого требуется также, чтобы смещение частицы поперек магнитного поля за время  $t_{\parallel}$  было достаточно мало. В частности, расстояние между двумя положениями точки поворота, в которых частица оказывается через время  $t_{\parallel}$ , должно быть порядка ларморовского радиуса. Это означает, что поперечная компонента  $\vec{F}_{\perp}$  силового поля должна быть величиной первого порядка по параметру  $\epsilon$  [68]. Если же она будет величиной нулевого порядка, то частица, двигаясь со скоростью дрейфа (3.23), за время  $t_{\parallel}$  настолько сместится поперек магнитных силовых линий, что предположение о периодичности продольного движения будет несправедливо.

Далее следует отметить, что при рассмотрении инвариантности магнитного момента можно было воспользоваться выражением для полного интеграла действия  $J^*$  в виде (2.71). Для изучения продольного инварианта такой подход неприменим, так как этот инвариант соответствует только одному члену суммы (2.71). Рассмотрим теперь уравнение для продольного дрейфового



движения. Воспользовавшись соотношением (3.17), получим

$$m \frac{d\vec{u}_{\parallel}}{dt} \hat{B} \approx q\vec{E}_{\parallel} - M \frac{\partial B}{\partial s} \hat{B}. \quad (4.6)$$

Здесь продольное электрическое поле  $\vec{E}_{\parallel}$  определяется из уравнения (2.24). В рассматриваемых условиях уравнение (4.6) описывает одномерное движение. Выражение для соответствующего гамильтониана в первом порядке по параметру  $\epsilon$  можно получить из формул (3.60) — (3.63). Для слабого электрического поля и для достаточно малых изменений магнитного поля [74] это выражение равно

$$H_{\parallel} = q\varphi + q\alpha \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2} m u_{\parallel}^2 + MB. \quad (4.7)$$

Здесь, в отличие от выражений (3.52) и (3.53) вместо переменных  $(\vec{\epsilon}\rho, \epsilon t)$  мы ввели независимые переменные  $(\vec{\rho}, t)$  и вернулись к переменным  $\alpha$  и  $\beta$ , причем для простоты изложения в правой части уравнения опустили гравитационный потенциал  $\Phi_g$ .

Для справедливости формул (4.6) и (4.7) необходимо, чтобы поле поперечных сил  $\vec{F}_{\perp}$  было величиной первого, а не нулевого порядка малости по параметру  $\epsilon$ . Если бы это поле было величиной нулевого порядка, то в выражениях (4.6) и (4.7) добавился бы вклад от скорости поперечного дрейфа  $\vec{E} \times \vec{B} / B^2$ . В этом случае продольное движение уже нельзя отделить от поперечного и приведенное выше одномерное уравнение для продольного движения оказывается несправедливым.

Из формул (2.24), (4.6) и (4.7) следует, что в первом порядке по параметру  $\epsilon$  продольное движение соответствует одномерной системе с каноническими координатами  $s$  и  $p_{\parallel} = m u_{\parallel} = m(ds/dt)$  при условии, что величину  $M$  можно считать постоянной. При этом  $MB(s)$  играет роль потенциальной энергии.

Из выражений (4.6), (2.24) и (4.7), видно, что при наличии продольных колебаний величина  $H_{\parallel} - \frac{1}{2} m u_{\parallel}^2$  должна иметь минимум на произвольной магнитной

силовой линии в некоторой точке  $s$ . Определим интеграл действия для продольного движения

$$J_{\parallel}^* \equiv J = \oint \left[ p_{\parallel} \frac{\partial s}{\partial \theta_{\parallel}} \right]_t d\theta_{\parallel} = m \oint u_{\parallel} ds \approx \text{const}, \quad (4.8)$$

который называют продольным адиабатическим инвариантом. Здесь продольная скорость  $u_{\parallel}$ , определяемая из соотношения  $u_{\parallel} = ds/dt$ , может иметь любой знак. Формулу (4.8) можно переписать также в следующем виде:

$$J = \oint p_{\parallel} ds = m \int_0^{t_{\parallel}} u_{\parallel}^2 dt = m \langle u_{\parallel}^2 \rangle t_{\parallel} = \text{const}, \quad (4.9)$$

где  $\langle u_{\parallel}^2 \rangle$  — среднее значение  $u_{\parallel}^2$  за период  $t_{\parallel}$ . Заметим, что  $s$  и  $p_{\parallel}$  связаны с обобщенными координатами  $q_2$  и  $p_2$ , введенными в гл. 3. При выводе уравнений для дрейфа ведущего центра частицы мы выделили из полной скорости частицы скорость вращения частицы по ларморовской орбите. Теперь попытаемся выделить продольные колебания из полного дрейфа ведущего центра. В результате получим уравнение для среднего дрейфа ведущего центра поперек магнитных силовых линий. Для этого выразим полную производную от скорости по времени в уравнении движения (3.16) через продольную  $\vec{u}_{\parallel}$  и поперечную  $u_{\perp}$  скорости:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} = & \left[ \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_{\parallel} + u_{\parallel}^2 (\hat{u}_{\parallel} \cdot \nabla) \hat{u}_{\parallel} + u_{\parallel} \hat{u}_{\parallel} (\hat{u}_{\parallel} \cdot \nabla) u_{\parallel} \right] + \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_{\perp} + (\vec{u}_{\perp} \cdot \nabla) \vec{u}_{\perp} \right] + [(\vec{u}_{\parallel} \cdot \nabla) \vec{u}_{\perp} + (\vec{u}_{\perp} \cdot \nabla) \vec{u}_{\parallel}]. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Первый и последний члены в первых квадратных скобках уравнения (4.10) равны левой части уравнения (4.6). Усредним уравнение движения (3.16) по продольному периоду  $t_{\parallel}$ , подставив в него предварительно выражение (4.10). Частица будет двигаться почти вдоль некоторой магнитной силовой линии в течение промежутка  $t_{\parallel}$ . При этом за один период частица дважды пройдет вблизи любой точки этой силовой линии. Сле-

довательно, продольные скорости частицы  $\vec{u}_{\parallel}$  для двух последовательных проходов вблизи любой точки равны по величине и противоположны по направлению. Далее, поперечная скорость  $\vec{u}_{\perp}$  по предположению мала и почти постоянна вблизи любой точки магнитной силовой линии. Следовательно, среднее значение последней квадратной скобки в уравнении (4.10) приближенно можно считать равным нулю. Поэтому, согласно выражениям (3.16), (4.6) и (4.10), уравнение движения для среднего дрейфа поперек магнитных силовых линий можно записать в виде

$$m \left\langle \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u}_{\perp} \cdot \nabla) \right] \vec{u}_{\perp} \right\rangle + m \langle u_{\parallel}^2 (\hat{B} \cdot \nabla) \hat{B} \rangle = \\ = q \langle \vec{E}_{\perp} + \vec{u}_{\perp} \times \vec{B} \rangle - \langle M \nabla_{\perp} B \rangle. \quad (4.11)$$

Сравним теперь уравнения (2.36), (3.16) и (4.11). Уравнение движения ведущего центра (3.16) получается из точного уравнения движения (2.36) усреднением по ларморовскому вращению частицы с периодом  $t_g$ . При этом возникает дополнительная средняя сила,  $-M \nabla B$ , которая представляет собой суммарный результат всех вкладов, возникающих за один период ларморовского вращения частицы. Аналогично, усредняя по периоду продольных колебаний  $t_{\parallel}$  уравнение движения (3.16), можно получить выражение (4.11). В этом случае в уравнении для среднего поперечного дрейфового движения (4.11) возникает дополнительная средняя сила  $-m \langle u_{\parallel}^2 (\hat{B} \cdot \nabla) \hat{B} \rangle$ . Это по существу центробежная сила, обусловленная кривизной магнитных силовых линий, которая действует на частицу в среднем за период  $t_{\parallel}$ . Так как эта сила пропорциональна  $u_{\parallel}^2$  и получается в результате усреднения по периоду продольных колебаний  $t_{\parallel}$ , она должна быть непосредственно связана с продольным инвариантом (4.9). Аналогичный вид имеют слагаемые, содержащие  $u_{\parallel}^2$  и  $M$  в уравнении (4.11); при этом первый член пропорционален отношению  $u_{\parallel}^2$  к радиусу кривизны магнитного поля, а последний —

отношению  $W^2$  к характерному поперечному размеру того же магнитного поля.

Так как изменения электрических и магнитных полей, действующих на частицу при вращении по лармовской орбите, достаточно малы, то в уравнение (3.16) можно подставить значения этих полей в точке нахождения ведущего центра. К сожалению, усреднение по периоду продольных колебаний  $t_{\parallel}$  в уравнении (4.11) следует производить вдоль магнитной силовой линии между двумя точками отражения, т. е. на длине, которая сравнима с характерными размерами электрического и магнитного полей. Поэтому уравнение (4.11) непригодно для точного рассмотрения поперечного дрейфа частиц с одной магнитной силовой линии на другую. Оно дает лишь грубую информацию о том, как происходит усредненное поперечное дрейфовое движение. При более строгом подходе к изучению усредненного дрейфового движения с одной магнитной силовой линии на другую следует применять канонические уравнения, в которых используются координаты магнитного поля  $\alpha$  и  $\beta$ . Настоящее рассмотрение показывает, что в более строгой теории в качестве параметров должны входить величины  $M$  и  $J$ . Действительно, в дальнейшем будет показано, что такая каноническая теория может быть развита в том случае, если величины  $M$  и  $J$  являются адиабатическими инвариантами.

Как будет показано в разделе 1.5, усредненное поперечное дрейфовое движение вокруг конфигураций, приведенных на рис. 4.1, в и 4.6, может оказаться приблизительно периодичным. В этом случае частица, совершив за время  $t_{\perp}$  один полный оборот вокруг конфигурации, оказывается вблизи своего первоначального положения. При этом в низшем порядке по параметру  $\epsilon$  усредненное поперечное дрейфовое движение можно считать одномерным и описывать при помощи канонических переменных  $\alpha = \epsilon p_1$  и  $\beta = \epsilon q_1$ . При этом соответствующий интеграл действия (2.71) равен

$$J_{\perp}^* = \oint \alpha d\beta = \oint \vec{A} d\vec{l} \equiv \Phi \approx \text{const} \quad (4.12)$$

согласно уравнению (2.21) и с калибровкой  $\vec{\nabla} \chi = 0$ . Это означает, что если частица периодически вращается

вокруг конфигурации со скоростью  $\vec{u}_\perp$ , то охватываемый ею за период обращения  $t_\perp$  магнитный потск  $\Phi$  можно считать постоянным при условии достаточно медленного изменения магнитного поля в течение всего периода обращения  $t_\perp$ . Это означает, что условие постоянства  $\Phi$  более жесткое, чем условие постоянства  $J$ .

Рассмотрим поперечное дрейфовое движение со скоростью  $\vec{u}_\perp$  (3.24) в отсутствие продольных движений и поля внешних сил для симметричной пробочной конфигурации, приведенной на рис. 4.1, в. Так как  $M$  — постоянная величина, то изменение  $\vec{u}_\perp$  пропорционально  $(\partial B/\partial r)/B$ . Рассмотрим частный случай, когда величину магнитного поля вдоль траектории частицы можно аппроксимировать выражением  $B(r, t) \approx B(r_0, t)(r_0/r)^{c_1}$ , где в момент времени  $t=0$   $r=r_0$ . Здесь  $c_1$  — постоянная величина, не равная нулю. В этом случае  $(\partial B/\partial r)/B$  и поперечная скорость дрейфа  $u_\perp$  оказываются пропорциональными  $1/r$ , и поэтому

$$\langle u_\perp^2 \rangle t_\perp \approx \text{const.} \quad (4.13)$$

Для слабо асимметричного магнитного поля периметр траектории и поперечная скорость дрейфа  $\vec{u}_\perp$  немного изменяются по сравнению со случаем, приведенным на рис. 4.1, в. Теперь формулой (4.13) можно пользоваться лишь для грубых оценок.

В заключение отметим, что формулы (4.5), (4.9) и (4.13) дают аналогичные соотношения между  $(W, t_g)$ ,  $(u_\parallel, t_\parallel)$  и  $(u_\perp, t_\perp)$ . Эти соотношения совпадают с условиями сохранения углового момента и импульса материальной точки, которая прикреплена к проволоке и вращается вокруг некоторой оси или попеременно отскакивает от двух поршней, движущихся навстречу друг другу. Эти результаты имеют непосредственное отношение к эффектам магнитного сжатия, которые рассмотрены в гл. 6.

В таблице приведены результаты исследования адиабатических инвариантов.

Характерные особенности адиабатических инвариантов, возникающих при движении частицы в электрическом и магнитном полях:  $t_{rf}$ —масштаб временного изменения этих полей в системе координат, которая движется вместе с частицей ( $M$ ) или с ее ведущим центром ( $J, \Phi$ )

Адиабатический инвариант	Скорость	Период	Необходимые допущения	Физический механизм
Эквивалентный магнитный момент $M$	Вращения $\vec{W}$	Вращения $t_g = 2\pi/ \omega_g ,$ $W^2 t_g = \text{const}$	$t_g \ll t_{cf}$	Изменение поперечной тепловой энергии при уменьшении или увеличении ларморовского радиуса
Продольный адиабатический инвариант $J$	Продольного дрейфа $\vec{u}_{\parallel}$	Продольных колебаний $t_{\parallel}$ $\langle u_{\parallel}^2 \rangle t_{\parallel} \approx \text{const}$	$t_g \ll t_{\parallel} \ll t_{cf}$ $M \approx \text{const}$	Изменение продольной энергии при уменьшении или увеличении расстояния между двумя магнитными пробками
Потоковый адиабатический инвариант $\Phi$	Поперечного дрейфа $\vec{u}_{\perp}$	Обращения вокруг конфигурации $t_{\perp},$ $\langle \bar{u}_{\perp}^2 \rangle t_{\perp} = \text{const}$	$t_g \ll t_{\parallel} \ll t_{\perp} \ll t_{cf}$ $M \approx \text{const}$ $J \approx \text{const}$	Уменьшение или увеличение полной поперечной орбиты частицы или поперечных размеров плазмы

## 1. 2. Эквивалентный магнитный момент

При исследовании интеграла действия (2.71) было показано, что магнитный момент (4.2) является адиабатическим инвариантом. Исходя из уравнения движения ведущего центра (3.16), можно привести аналогичное доказательство с точностью до членов первого порядка по параметру  $\epsilon$ . Это позволяет более четко понять те физические причины, которые приводят к сохранению магнитного момента  $M$ .

Умножая скалярно уравнение (3.16) на  $\vec{u}$ , получаем следующее выражение:

$$\frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (u^2) = \vec{F} \cdot \vec{u} - M \vec{u} \cdot \vec{\nabla} B, \quad (4.14)$$

которое можно рассматривать как уравнение для энергии дрейфового движения. Последний член в этом уравнении описывает связь между движениями всех трех типов со скоростями  $\vec{W}$ ,  $\vec{u}_{\parallel}$  и  $\vec{u}_{\perp}$ . Вычитая из уравнения для полной энергии частицы (2.38) уравнение (4.14), получаем

$$\frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (W^2 + 2\vec{u}_{\perp} \cdot \vec{W}) = \vec{F} \cdot \vec{W} + M \vec{u} \cdot \vec{\nabla} B. \quad (4.15)$$

где  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{W}$  — полная скорость частицы. Далее умножим уравнение (4.15) на  $dt$  и проинтегрируем его по всему периоду ларморовского вращения  $t_g = 2\pi/|\omega_g|$ , воспользовавшись при этом выражением (2.37) для полной силы  $\vec{F}$ . Так как  $|\vec{u}_{\perp} \cdot \vec{W}| \ll W^2$ , то, пользуясь формулой  $W = d\vec{a}/dt$ , легко получить уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} t_g m \frac{dW^2}{dt} &\approx - \int_0^{t_g} \left[ \vec{\nabla} (q\phi + m\phi_g) + q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] \times \\ &\times \vec{W} dt + t_g M (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) B = - \oint \vec{\nabla} (q\phi + m\phi_g) d\vec{a} - \\ &- q \oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{a} + t_g M (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) B. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Здесь предполагается, что величины  $\vec{F}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{u}$  и  $W^2$  мало

изменяются в течение ларморовского периода. В то же время будем считать, что радиус ларморовского вращения  $a$  описывает почти замкнутую траекторию. Таким образом, первый интеграл в правой части второго равенства (4.16) приблизительно равен нулю, а второй интеграл в том же выражении можно записать в следующем виде:

$$q \oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{a} = -|q| \iint \hat{n} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dS \approx -|q| a^2 \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (4.17)$$

Знак минус перед интегралом появляется потому, что при положительном направлении магнитного поля  $\vec{B}$  вращение ионов вокруг магнитных силовых линий происходит по часовой стрелке, а вращение электронов — против часовой стрелки. Уравнение (4.17) описывает бетатронное ускорение частицы при движении по ларморовской окружности, которое происходит в определенной точке пространства в отсутствие скорости дрейфового движения  $\vec{u}$ . Используя определения  $M = mW^2/2B$ ,  $a = mW/|q|B = W/|\omega_g|$  и  $t_g = 2\pi/|\omega_g|$ , из формул (4.16) и (4.7) получаем

$$\frac{1}{2} m \frac{dW^2}{dt} = M \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) B. \quad (4.18)$$

В этом уравнении член  $M(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) B$  описывает бетатронное ускорение частицы, которое возникает в том случае, если частица дрейфует со скоростью  $\vec{u}$  в стационарном неоднородном магнитном поле  $\vec{B}$ . Отсюда следует, что правая часть уравнения (4.18) описывает полный эффект ускорения частицы, связанный с изменением магнитного поля в системе координат, движущейся со скоростью  $\vec{u}$ . Воспользуемся теперь определением величины  $M$ , а также тем, что полная производная, вычисленная при помощи точной скорости частицы  $\vec{w}$ , приблизительно совпадает с полной производной, вычисленной при учете лишь дрейфовой скорости частицы  $\vec{u}$ . Тогда получим

$$\frac{dM}{dt} \approx 0. \quad (4.19)$$



Таким образом, из уравнений (4.18) и (4.19) следует, что сохранение магнитного момента  $M$  определяется балансом энергии вращающейся частицы. При этом изменение энергии частицы возникает в результате двумерного адиабатического «сжатия» орбиты частицы в магнитном

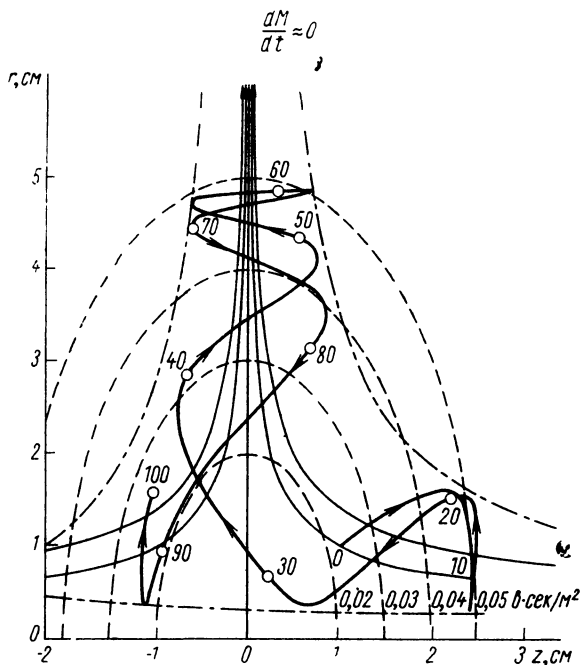


Рис. 4.2. Траектория частицы в магнитном поле квадрупольного типа:

— траектория частицы; — магнитные силовые линии; - - - - линии постоянной величины магнитного поля; ····· пограничные кривые. Вдоль траектории частицы указан масштаб времени в единицах  $10^{-7}$  сек.

поле. Поток магнитного поля через поперечное сечение ларморовской орбиты  $\pi a^2 B = 2(m/q^2)M$  также можно считать приближенным интегралом движения. Другими словами, ларморовская орбита ведет себя подобно кольцеобразному сверхпроводнику из легко деформируемого и невесомого материала: она изменяет свой радиус так, чтобы проходящий через нее магнитный поток оставался постоянным. Однако в реальных физи-

ческих случаях ларморовский радиус, а также характерные пространственные и временные масштабы изменения электромагнитного поля конечны. При этом эквивалентный магнитный момент уже нельзя считать точным интегралом движения частицы, а траектории частиц в большинстве случаев оказываются слабо не-

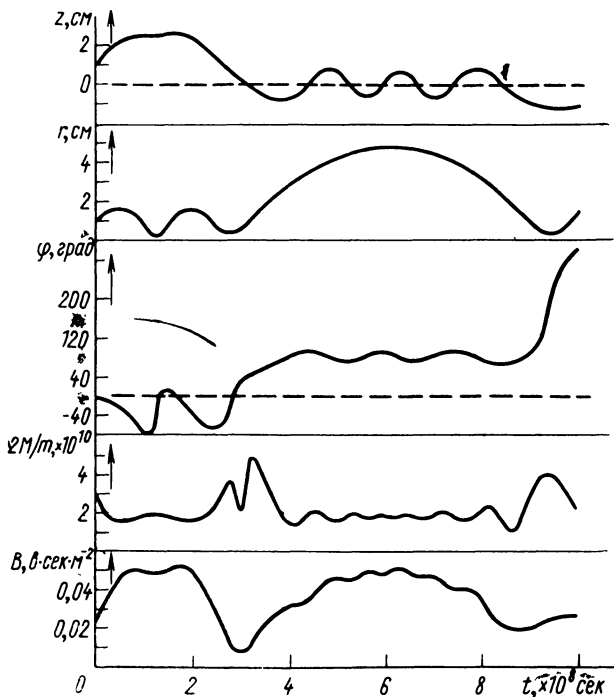


Рис. 4.3. Зависимость положения эквивалентного магнитного момента и локального магнитного поля от времени для частицы, траектория которой приведена на рис. 4.2. Величина ларморовского радиуса в рассматриваемом случае настолько велика, что условия (3.1) и (3.2) не выполняются

адиабатичными. Это можно показать на следующих примерах.

1. Несохранение магнитного момента, вызванное изменением во времени однородного магнитного поля [62].

2. Движение протона в квадрупольном магнитном поле  $B_r = c_0 r$ ,  $B_\varphi = 0$ ,  $B_z = -2c_0 z$  [48].

На рис. 4.2 показана траектория движения частицы в магнитном поле с напряженностью  $c_0 = 1$  в.сек/м<sup>3</sup>. Скорость частицы равна  $3 \cdot 10^4$  м/сек. На рис. 4.3 показано изменение положения частицы ( $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ ) и ее магнитного момента  $M$  в зависимости от времени  $t$ . Изменения магнитного момента  $M$  велики, когда величина  $a |\vec{\nabla}|/B$  становится порядка единицы. При этом условия (3.1) и (3.2) не выполняются, и адиабатическая инвариантность нарушается.

3. Удержание частиц в аксиально симметричном поле с магнитными пробками исследовалось в работе [79] как аналитически, так и при помощи численных методов. Было вычислено изменение магнитного момента при последовательных отражениях частицы от магнитных зеркал в зависимости от скорости частицы. В частности, было обнаружено влияние асимметрии магнитного поля на уход частиц из ловушки через магнитные пробки. Это происходит в результате несохранения магнитного момента  $M$ .

### 1. 3. Продольный адиабатический инвариант

Прежде чем приступить к детальному изучению свойств продольного адиабатического инварианта, рассмотрим движение частицы в магнитном поле пробочной конфигурации (рис. 4.4). Расстояние  $2s_m$  между магнитными пробками меняется во времени достаточно медленно по сравнению с периодом продольных колебаний частицы  $t_{\parallel}$ . При этом отражение частицы происходит в узкой области толщиной  $\Delta s_m \ll 2s_m$ , где напряженность магнитного поля увеличивается от  $\vec{B}_0$  до  $\vec{B}_m$ . Движение частицы аналогично движению упругого шарика, который попеременно отскакивает от двух движущихся навстречу друг другу поршней. В этом случае в течение каждого периода  $t_{\parallel} = 4s_m/|\vec{u}_{\parallel}|$  шарик приобретает скорость, равную

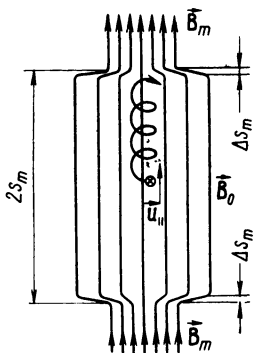


Рис. 4.4. Движение заряженной частицы, захваченной двумя магнитными пробками, расстояние между которыми  $2s_m$  изменяется во времени.

$-4(ds_m/dt)$ . Отсюда следуют уравнения

$$\frac{d}{dt} |u_{\parallel}| = - \left( \frac{|u_{\parallel}|}{s_m} \right) \frac{ds_m}{dt} \quad (4.20)$$

и

$$4 |u_{\parallel}| s_m = u_{\parallel}^2 t_{\parallel} = \text{const}, \quad (4.21)$$

которые в точности совпадают с формулой (4.9). Это и есть тот эффект продольного адиабатического сжатия [76], который увеличивает продольную энергию частицы  $\frac{1}{2} mu_{\parallel}^2$ .

Перейдем теперь от простого примера к общему случаю [78]. Если в конфигурации магнитного поля, изображенной на рис. 4.4, легко представить положение точек отражения частицы, то для магнитного поля произвольной формы, медленно изменяющегося во времени, это сделать значительно труднее. Кроме того, и это гораздо важнее, в произвольном магнитном поле одновременно с колебаниями частицы происходит дрейф поперек магнитных силовых линий со скоростью  $\vec{u}_{\perp}$ . Таким образом, частица с радиусом-вектором  $\vec{\rho}(\alpha, \beta, s, t)$ , находящаяся в момент времени  $t$  в точке, лежащей на магнитной силовой линии  $L_0$ , дрейфует по направлению к магнитной силовой линии  $L_1$ , как это показано на рис. 4.5. Это происходит в течение короткого интервала времени  $dt = ds/u_{\parallel}$ , когда смещение поперек силовой линии мало по сравнению с  $ds$  и можно считать, что частица находится на элементе длины  $ds$  магнитной силовой линии  $L_0$ . Если же поместить частицу в точку с радиус-вектором  $\rho'$ , лежащую на магнитной силовой линии  $L_0$ , то она будет дрейфовать из элемента длины  $ds'$  этой силовой линии по направлению к силовой линии  $L_2$ , которая не обязательно совпадает с  $L_1$ . Так как в общем случае одновременно с продольными колебаниями частицы возникает медленный и меняющийся вдоль силовой линии дрейф, приводящий к уходу частицы с данной силовой линии, то отсутствует строгая аналогия между рассматриваемым общим случаем и одномерным движением (см. рис. 4.4). Таким образом, теперь нужно

построить теорию, которая учитывала бы тот факт, что частицы не попадают точно в первоначальную точку после одного продольного колебания.

В дальнейшем покажем, что для каждой магнитной силовой линии можно однозначно определить интеграл действия (4.8). Поскольку поперечный дрейф приводит к переходу частиц с одной магнитной силовой линии на другую, то, с точки зрения наблюдателя, движущегося

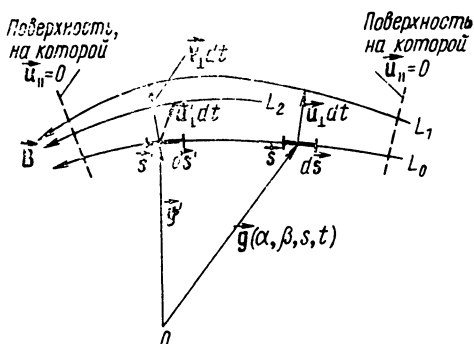


Рис. 4.5. Дрейф частицы, находящейся на элементе длины  $ds$  магнитной силовой линии  $L_0$ , по направлению к силовой линии  $L_1$  за промежуток времени  $dt$ .

вдоль действительной траектории частицы, возникнет мгновенное изменение  $dJ/dt$  продольного адиабатического инварианта  $J$ . Очевидно,  $dJ/dt \neq 0$ . Покажем, однако, что среднее значение

$$\left\langle \frac{dJ}{dt} \right\rangle = \frac{1}{t_{\parallel}} \oint \frac{dJ}{dt} \cdot \frac{ds}{u_{\parallel}}, \quad (4.22)$$

взятое по полному продольному периоду, приблизительно равно нулю. Это означает, что все изменения  $J$ , возникающие при различных положениях частицы  $\vec{\rho}$  и  $\vec{\rho}'$ , приблизительно компенсируются в течение одного периода  $t_{\parallel}$  продольных колебаний.

Предположим, что значение  $\vec{F}$  связана только с электрическим полем  $E$ , и для гамильтониана продольного движения  $H_{\parallel}$  воспользуемся выражением (4.7). Из раздела 1.1 следует, что определение продольного инвари-

анта  $J$  имеет смысл только в том случае, если эквивалентный магнитный момент  $M = mW^2/2B$  — адиабатический инвариант. Предположим, что это условие выполнено. Кроме того, ограничимся случаем, когда продольные колебания частицы происходят в пространстве между двумя магнитными пробками, так что величина  $H_{\parallel} - \frac{1}{2} mu_{\parallel}^2$  имеет минимум в этой области. Все члены в правой части выражения (4.7) изменяются достаточно медленно по сравнению со временем обращения частицы по ларморовской орбите  $t_g$ . Поэтому в выражении для полной производной по времени  $\dot{H}_{\parallel}$  полную скорость частицы с достаточной точностью можно заменить скоростью дрейфа  $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned} \dot{H}_{\parallel} \approx \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) H_{\parallel} \approx \frac{\partial}{\partial t} \left( q\phi + q\alpha \frac{\partial \beta}{\partial t} + MB \right) + \\ + q\vec{u}_{\perp} \cdot \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} \vec{\nabla} \alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \vec{\nabla} \beta \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

При этом для исключения величин  $\vec{\nabla} \left( \phi + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial t} \right)$  и  $\vec{E} \cdot \vec{u}$  мы воспользовались уравнениями (2.23) и (4.14) соответственно. Кроме того, векторы  $\vec{\nabla} \alpha$  и  $\vec{\nabla} \beta$  перпендикулярны магнитному полю  $\vec{B}$ , а член  $(u_{\perp}/u_{\parallel})^2$  мал по сравнению с единицей и поэтому несуществен при дальнейшем рассмотрении. Выражение (4.23) не содержит частной производной по продольной координате  $s$ . Поэтому  $\partial H_{\parallel} / \partial s = 0$ , что следует также из продольной компоненты уравнения движения ведущего центра (4.6) и выражения (4.7). Скорость изменения гамильтониана  $H_{\parallel}$  в системе отсчета, движущейся вдоль магнитной силовой линии ( $\alpha = \text{const}$ ,  $\beta = \text{const}$ ) со скоростью, равной продольной скорости частицы  $u_{\parallel}$ , выражается первым членом в правой части уравнения (4.23). Для стационарных полей  $\dot{H}_{\parallel} = 0$  и  $H_{\parallel}$  — интеграл энергии для продольных колебаний в потенциальной яме, определяемой выражением  $q\phi + MB$ . Если  $\partial H_{\parallel} / \partial t \neq 0$ , то  $H_{\parallel}$  все еще может быть интегралом энергии этого движения; при этом  $H_{\parallel}$  оказывается постоянным вдоль магнитной силовой

линии, если колебания частицы вдоль силовой линии достаточно быстры по сравнению с изменением внешнего магнитного поля. В этом случае изменение гамильтониана  $H_{\parallel}$  со временем происходит достаточно медленно и пропорционально изменению внешнего магнитного поля.

Используя введенные определения, представим выражение для продольного инварианта в следующем виде:

$$J = m \oint u_{\parallel} (s') ds', \quad u_{\parallel} = \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} (H_{\parallel} - q\varphi - qz \times \\ \times \frac{\partial \beta}{\partial t} - MB)^{1/2}, \quad (4.24)$$

где интегрирование по  $ds'$  производится вдоль заданной магнитной силовой линии, причем функции  $H_{\parallel}$ ,  $\varphi$ ,  $\alpha \frac{\partial \beta}{\partial t}$  и  $MB$  однозначно определяются в каждый момент времени  $t$  для произвольной магнитной силовой линии  $L_0$ . Из уравнения (4.24) следует, что изменение продольного инварианта  $dJ/dt$  при движении частицы связано с изменением продольной скорости  $u_{\parallel}$  и элемента длины  $ds'$ . Для того чтобы получить полное изменение продольного инварианта  $dJ/dt$ , вычислим связанное с движением частицы изменение произвольного элемента длины  $ds'$ . Для этого на заданной магнитной силовой линии  $L_0$  между точками отражения определим для каждого элемента длины  $ds'$  на заданной магнитной силовой линии  $L_0$  скорость  $V_{\perp}(s, s')$  перпендикулярную направлению магнитного поля  $\hat{B}(s')$  для элемента длины  $ds'$ . Эта скорость переводит точку с магнитной силовой линии  $L_0$  на силовую линию  $L_1$  за то же время  $dt$ , которое необходимо для перемещения частицы, находящейся внутри элемента длины  $ds$ , с силовой линии  $L_0$  на силовую линию  $L_1$ . Отметим, что скорость  $\vec{V}_{\perp}(s, s')$  отличается от дрейфовой скорости частицы  $\vec{u}'_{\perp}$  для данного элемента длины  $ds'$ , как это показано на рис. 4.5. Действительно, если частица находится внутри элемента длины  $ds'$ , то она будет дрейфовать к магнитной силовой линии  $L_2$ , а не к  $L_1$ .

Теперь точно определим мгновенное значение величины  $dJ/dt$ . Если в начальный момент времени частица находится внутри элемента длины  $ds$  магнитной силовой линии  $L_0$ , то в результате дрейфового движения через интервал времени  $dt$  частица окажется на силовой линии  $L_1$ . При этом интеграл в выражении (4.24) изменится от первоначального значения  $J(L_0)$  на магнитной силовой линии  $L_0$  до соответствующего значения  $J(L_1)$ , которое получается при интегрировании вдоль магнитной силовой линии  $L_1$ . Введя обозначение  $u'_{\parallel} \equiv u(s')$ , получим изменение этого интеграла

$$dJ = m \oint [du'_{\parallel} ds' + u'_{\parallel} d(ds')] = m \oint \frac{1}{2u'_{\parallel}} \times \\ \times [2u'_{\parallel}{}^2 d(ds') + d(u'_{\parallel}{}^2) ds']. \quad (4.25)$$

Таким образом, изменение продольного инварианта  $dJ$  за время  $dt$  в точке с радиус-вектором  $\vec{\rho}$  связано с изменением  $u'_{\parallel}{}^2$  и элемента длины, возникающих при дрейфе частицы с одной силовой линии на другую (см. рис. 4.5).

Рассмотрим изменение величины  $u'_{\parallel}{}^2$ . При вычислении этого изменения, связанного с вкладом от продольного гамильтониана  $H_{\parallel}$ , следует иметь в виду, что  $H_{\parallel}$  остается постоянным вдоль магнитной силовой линии. Если частица перемещается за время  $dt$  с одной силовой линии  $L_0$  на другую  $L_1$ , то связанный с изменением продольного гамильтониана  $H_{\parallel}$  вклад в полный интеграл (4.25) равен  $dH_{\parallel} = \dot{H}_{\parallel}(s) dt$ , где  $\dot{H}_{\parallel}$  определяется формулой (4.23). Изменение величины  $u'_{\parallel}{}^2$ , связанное с последними тремя членами в выражении (4.24), определяется выражением

$$d \left[ q\Phi + q\alpha \frac{\partial \beta}{\partial t} + MB \right]' = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_{\perp} \cdot \vec{\nabla} \right) \times \\ \times \left( q\Phi + q\alpha \frac{\partial \beta}{\partial t} + MB \right)' dt, \quad (4.26)$$

где штрих указывает, что все величины вычисляются для определенной точки силовой линии  $s'$ . Очевидно, вы-



ражение (4.26) изменяется вдоль магнитной силовой линии  $L_0$ . В каждой точке  $s'$  силовой линии оно определяется полной производной по времени, вычисляемой в соответствии с вышеприведенными рассуждениями при помощи скорости  $\vec{V}_\perp(s, s')$ , которая переводит точки с магнитной силовой линии  $L_0$  на магнитную силовую линию  $L_1$ . Наконец нужно еще получить выражение для изменения элемента длины  $ds'$  за время  $dt$ . Воспользуемся для этого геометрическими соображениями. Из рис. 3.3 видно, что рассматриваемое изменение элемента длины  $ds'$  определяется скоростью изменения радиуса кривизны  $R$  магнитной силовой линии в системе отсчета, движущейся вместе с частицей,

$$d(ds') = \vec{V}_\perp \cdot \vec{\nabla}(ds') dt = -\vec{V}_\perp \cdot \frac{\partial \hat{B}}{\partial s'} \cdot ds' dt. \quad (4.27)$$

Подставляя формулы (4.26) и (4.27) в соотношение (4.25), получаем выражение для скорости изменения адиабатического инварианта  $J$

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} = & \oint \left[ \dot{H}_\parallel - \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_\perp \cdot \vec{\nabla} \right) (q\varphi + q\alpha \frac{\partial \beta}{\partial t} + MB)' - \right. \\ & \left. - mu'^2_\parallel \vec{V}_\perp \left( \frac{\partial \hat{B}}{\partial s} \right)' \right] \frac{ds'}{u'_\parallel}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Получим явное выражение для вектора скорости  $\vec{V}_\perp(s, s')$ . Поле скоростей, задаваемое этим вектором, сохраняет силовую линию и в точке с радиус-вектором  $\mathbf{q}$  совпадает с локальной дрейфовой скоростью частицы  $\vec{u}_\perp(s)$  (см. рис. 4.5). Задавая положение магнитных силовых линий при помощи координат  $(\alpha, \beta)$ , получаем

$$\dot{\alpha}(s) = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{u}_\perp \cdot \vec{\nabla} \alpha \right)_s = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{V}_\perp \cdot \vec{\nabla} \alpha \right)_{s'}, \quad (4.29)$$

$$\dot{\beta}(s) = \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} + \vec{u}_\perp \cdot \vec{\nabla} \beta \right)_s = \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} + \vec{V}_\perp \cdot \vec{\nabla} \beta \right)_{s'}, \quad (4.30)$$

где  $\vec{V}_\perp(s'=s) = \vec{u}_\perp(s)$ . Определенный таким образом вектор скорости  $\vec{V}_\perp$  оказывается перпендикулярным магнитной силовой линии  $L_0$  в каждой ее точке  $s'$

$$\widehat{B}(s') \cdot \vec{V}_\perp(s') = 0. \quad (4.31)$$

Таким образом, получим окончательное выражение для

$$\vec{V}_\perp = \left[ (\dot{\alpha} \vec{\nabla} \beta' - \dot{\beta} \vec{\nabla} \alpha') + \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} \vec{\nabla} \alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \vec{\nabla} \beta \right)' \right] \times \left( \frac{\vec{B}}{B^2} \right)', \quad (4.32)$$

где штрих означает, что все величины взяты в точке  $s'$ . Очевидно, выражение (4.32) для скорости  $\mathbf{V}_\perp$  удовлетворяет условию (4.31). При помощи несложных векторных преобразований и формулы (2.22) найдем

$$\vec{V}_\perp \cdot \vec{\nabla} \alpha' = \left( \dot{\alpha} - \frac{\partial \alpha'}{\partial t} \right) \left( \vec{\nabla} \beta \times \frac{\vec{B}}{B^2} \right)' \cdot \vec{\nabla} \alpha' = \dot{\alpha} - \frac{\partial \alpha'}{\partial t}. \quad (4.33)$$

Оно совпадает с формулой (4.29), а из симметрии координат  $\alpha$  и  $\beta$  следует, что при этом также выполняется соотношение (4.30).

Воспользуемся теперь полученными формулами для преобразования выражения (4.28). В соответствии с формулами (3.18) — (3.20) скорость поперечного дрейфа частицы равна

$$\vec{u}_\perp = \left( q \vec{E} - M \vec{\nabla} B - m u_\parallel^2 \frac{\partial \widehat{B}}{\partial s} - m \frac{d \vec{u}_\perp}{dt} \right) \times \frac{\vec{B}}{q B^2}, \quad (4.34)$$

где в первом приближении по параметру  $\epsilon$  можно пренебречь последним членом в скобках. Используя выражения (3.23), (3.22), (4.32) и (4.34) соответственно для  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{V}_\perp$  и  $\vec{u}_\perp$ , после несложных преобразований преобразуем интеграл (4.28).

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} = & \oint \left[ \dot{H}_\parallel(s) - \frac{\partial}{\partial t} (q\varphi + q\alpha \frac{\partial \beta}{\partial t} + MB)' - q u'_\perp \times \right. \\ & \times \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} \vec{\nabla} \alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \vec{\nabla} \beta \right)' - q \dot{\alpha} \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} + \vec{u}_\perp \vec{\nabla} \beta \right)' + \\ & \left. + q \dot{\beta} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{u}_\perp \vec{\nabla} \alpha \right)' \right] \frac{ds'}{u'_\parallel}, \quad (4.35) \end{aligned}$$

где  $\dot{\alpha}$  и  $\dot{\beta}$  вычислены в точке  $s'$ . Сравнение полученного результата с соотношением (4.23) показывает, что второй и третий члены подынтегрального выражения в формуле (4.35) равны величине  $\dot{H}_{\parallel}$ , вычисленной в точке  $s'$ ,

$$\frac{dJ}{dt} = \oint \{ \dot{H}_{\parallel}(s) - \dot{H}_{\parallel}(s') + q [\dot{\beta}(s) \dot{\alpha}(s') - \dot{\alpha}(s) \dot{\beta}(s')] \} \frac{ds'}{u_{\parallel}}. \quad (4.36)$$

Здесь для величин  $\dot{\alpha}$  и  $\dot{\beta}$  использованы выражения (4.29) и (4.30). Из формулы (4.36) следует, что нет причин для обращения величины  $dJ/dt$  в нуль.

При помощи определения (4.22) получим

$$\left\langle \frac{dJ}{dt} \right\rangle = \frac{1}{t_{\parallel}} \oint \oint \{ \dot{H}_{\parallel}(s) - \dot{H}_{\parallel}(s') + q [\dot{\beta}(s) \dot{\alpha}(s') - \dot{\alpha}(s) \dot{\beta}(s')] \} \frac{ds ds'}{u_{\parallel} u'_{\parallel}} = 0. \quad (4.37)$$

Таким образом, вследствие антисимметрии подынтегрального выражения в формуле (4.37) средняя скорость изменения величины  $J$  равна нулю.

Настоящий вывод согласуется с результатом, полученным в разделе 1.1 при помощи интеграла действия (4.8). Преимуществом данного вывода, приводящего к формуле (4.37), является учет мгновенного поперечного дрейфа частицы со скоростью  $\vec{u}_{\perp}$ , в результате которого на продольные колебания частицы накладывается смещение поперек магнитных силовых линий. При этом ограничения, накладываемые на величину  $\vec{J}$ , оказываются менее жесткими по сравнению с ограничениями, введенными в разделе 1.1, где предполагалось, что частица остается на данной магнитной силовой линии в течение всего периода продольных колебаний  $t_{\parallel}$ . Кроме того, этот вывод позволяет лучше понять механизм, приводящий к сохранению величины  $J$ . Из антисимметрии подынтегрального выражения в формуле (4.37) следует, что вклады в изменение величины  $J$  от поперечного

дрейфа частицы в различных точках данной магнитной силовой линии компенсируются за полный период продольных колебаний  $t_{\parallel}$ .

### 1. 4. Уравнения движения для среднего дрейфа частицы

Если колебания частицы вдоль магнитной силовой линии происходят достаточно быстро по сравнению с поперечным дрейфом частицы, то прежде всего вызывает интерес среднее поперечное движение, в результате которого частица переходит с одной силовой линии на другую, т. е. меняет координаты  $\alpha$  и  $\beta$ . Эта задача была решена Б. Б. Кадомцевым [80], а затем Нортропом и Теллером [78].

Состояние частицы при среднем дрейфовом движении характеризуется координатами  $\alpha$  и  $\beta$ , интегралом энергии продольного движения  $H_{\parallel}$  и магнитным моментом  $M$ , который связан с энергией вращения частицы по ларморовской окружности. Поэтому  $J = J(\alpha, \beta, H_{\parallel}, M, t)$  можно считать функцией этих величин, остающихся постоянными вдоль произвольной магнитной силовой линии. При этом среднее дрейфовое движение поперек магнитного поля изменяет величины  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $H_{\parallel}$ . В этом случае уравнение (4.36) перепишем в виде

$$\frac{dJ}{dt} = t_{\parallel} (\dot{H}_{\parallel} - \langle \dot{H}_{\parallel} \rangle) - qt_{\parallel} (\dot{\alpha} \langle \dot{\beta} \rangle - \dot{\beta} \langle \dot{\alpha} \rangle), \quad (4.38)$$

где  $\langle \rangle$  — среднее значение соответствующей величины по периоду продольных колебаний  $t_{\parallel}$ . Так как величина магнитного момента  $M$  частицы сохраняется, то выражение для полного изменения величины  $J$  в пространстве переменных  $(\alpha, \beta, H_{\parallel})$  можно записать в следующем виде:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = \frac{\partial J}{\partial \beta} \dot{\beta} - \frac{\partial J}{\partial H_{\parallel}} \dot{H}_{\parallel}. \quad (4.39)$$

Сравнивая формулы (4.38) и (4.39), получаем

$$\langle \dot{H}_{\parallel} \rangle = -\frac{1}{t_{\parallel}} \cdot \frac{\partial J}{\partial t}, \quad (4.40)$$

$$\langle \dot{\beta} \rangle = -\frac{1}{qt_{\parallel}} \cdot \frac{\partial J}{\partial \alpha}, \quad (4.41)$$

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = \frac{1}{qt_{\parallel}} \cdot \frac{\partial J}{\partial \beta}, \quad (4.42)$$

$$1 = \frac{1}{t_{\parallel}} \cdot \frac{\partial J}{\partial H_{\parallel}}. \quad (4.43)$$

Первые три уравнения описывают усредненное поперечное дрейфовое движение, которое происходит в отсутствие продольных колебаний. Последнее следует непосредственно из определения продольного инварианта  $J$  (4.24). В результате такого дрейфового движения частица переходит на такую ближайшую силовую линию, где продольный адиабатический инвариант  $J$  совпадает с его величиной на начальной силовой линии.

Однако уравнения (4.40) — (4.43) не являются каноническими, так как множитель  $t_{\parallel}$  зависит от  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $H_{\parallel}$ ,  $M$ ,  $t$ . Вообще говоря,  $J$  тоже является некоторой функцией указанных выше переменных  $J = J(\alpha, \beta, H_{\parallel}, M, t)$ . Разрешая последнее уравнение относительно  $H_{\parallel}$  и подставляя полученное выражение для  $H_{\parallel}$  в правую часть уравнения, получаем тождество относительно переменных  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $M$ ,  $t$ . Дифференцируя это тождество по правилам дифференцирования неявных функций, получаем соотношение  $\partial J / \partial \alpha = -(\partial H_{\parallel} / \partial \alpha) / (\partial H_{\parallel} / \partial J)$  и другие. Поэтому уравнения (4.40) — (4.43) перепишем в следующем виде

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = -\frac{1}{q} \cdot \frac{\partial H_{\parallel}}{\partial \beta}, \quad (4.44)$$

$$\langle \dot{\beta} \rangle = \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial H_{\parallel}}{\partial x}, \quad (4.45)$$

$$\langle \dot{H}_{\parallel} \rangle = \frac{\partial H_{\parallel}}{\partial t}, \quad (4.46)$$

$$1 = t_{\parallel} \frac{\partial H_{\parallel}}{\partial J}. \quad (4.47)$$

Уравнения (4.44) — (4.46), имеющие теперь канонический вид, соответствуют уравнениям (2.57), (2.56) и (2.59).

Уравнения для скорости изменения величин  $\alpha$  и  $\beta$  можно переписать в векторной форме. В системе координат, связанной с точкой  $s'$  силовой линии  $L_1$ , частица,

находящаяся в окрестности  $ds$  точки  $s$  силовой линии  $L_0$ , будет дрейфовать с некоторой скоростью  $\vec{V}_\perp(s, s')$ . При этом среднюю скорость дрейфа частицы с силовой линии  $L_0$  к точке  $s'$  силовой линии  $L_1$  в указанной системе отсчета можно получить из  $\vec{V}_\perp(s, s')$  усреднением по всем возможным положениям частицы  $s$  за период  $t_\parallel$ . Поэтому в соответствии с уравнением (4.32) эту скорость можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle \vec{V}_\perp \rangle = & \frac{1}{t_\parallel} \oint \vec{V}_\perp(s, s') \frac{ds}{u_\parallel} = \left[ \langle \dot{\alpha} \rangle \vec{\nabla} \beta' - \langle \dot{\beta} \rangle \vec{\nabla} \alpha' + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} \vec{\nabla} \alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \vec{\nabla} \beta \right)' \right] \times \left( \frac{\vec{B}}{B^2} \right)'. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Подставляя из уравнений (4.44) и (4.45) выражения для  $\langle \dot{\alpha} \rangle$  и  $\langle \dot{\beta} \rangle$  и используя постоянство  $H_\parallel$  вдоль силовой линии, получаем следующую формулу для  $\langle \vec{V}_\perp \rangle$ :

$$\langle \vec{V}_\perp \rangle = \frac{\vec{B} \times \left[ \vec{\nabla} H_\parallel - q \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} \vec{\nabla} \alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \vec{\nabla} \beta \right) \right]}{qB^2}, \quad (4.49)$$

где штрихи всюду опущены.

Теперь при помощи метода, развитого в гл. 2, покажем, что поле  $\langle \vec{V}_\perp \rangle$  сохраняет поток. Действительно, используя формулы (2.1), (2.22) и (4.49), легко получить

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{E} + \langle \vec{V}_\perp \rangle \times \vec{B}) = & -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \alpha \times \vec{\nabla} \beta) + \frac{1}{q} \text{rot} \times \\ \times \left[ \vec{\nabla} H_\parallel - q \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} \vec{\nabla} \alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \vec{\nabla} \beta \right) \right] = & -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \alpha \times \vec{\nabla} \beta) - \\ - \vec{\nabla} \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \times \vec{\nabla} \alpha + \vec{\nabla} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) \times \vec{\nabla} \beta = & 0. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Таким образом, условие сохранения потока (2.29) тождественно выполняется для векторного поля  $\langle \vec{V}_\perp \rangle$ . Кроме того, в соответствии с определением этого поля,

данным в разделе 1.3, оно удовлетворяет также условию сохранения силовых линий (2.34).

Пусть величина  $Q_p(\alpha, \beta, J, M, t)$  — плотность частиц в пространстве  $(\alpha, \beta, J, M)$  в момент времени  $t$ . Каждой точке этого пространства соответствует частица, находящаяся в момент времени  $t$  в некоторой точке силовой линии с координатами  $(\alpha, \beta)$  и имеющая магнитный момент  $M$  и продольный инвариант  $J$ . Движению в этом пространстве соответствует усредненное движение частиц, причем средние величины, характеризующие частицу, получаются при усреднении по быстрым вращениям частицы и по быстрым продольным колебаниям. Так как  $\langle \dot{J} \rangle = 0$  и  $\langle \dot{M} \rangle = 0$ , получим уравнение непрерывности в этом пространстве

$$\frac{\partial Q_p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \alpha} (Q_p \langle \dot{\alpha} \rangle) + \frac{\partial}{\partial \beta} (Q_p \langle \dot{\beta} \rangle) = 0. \quad (4.51)$$

Из уравнений (4.44) и (4.45) следует равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \langle \dot{\alpha} \rangle &= - \frac{\partial}{\partial \beta} \langle \dot{\beta} \rangle, \text{ поэтому} \\ \frac{dQ_p}{dt} &= \frac{\partial Q_p}{\partial t} + \langle \dot{\alpha} \rangle \frac{\partial Q_p}{\partial \alpha} + \langle \dot{\beta} \rangle \frac{\partial Q_p}{\partial \beta} = 0. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Это означает, что плотность частиц  $Q_p$  остается постоянной при движении со средними скоростями  $\langle \dot{\alpha} \rangle$  и  $\langle \dot{\beta} \rangle$ . Это теорема Лиувилля в пространстве  $(\alpha, \beta, J, M)$ . Она справедлива для любой канонической системы (см. гл. 5).

В ортогональных координатах  $\alpha$  и  $\beta$ , связанных с магнитными силовыми линиями, элемент поверхности в плоскости  $\alpha\beta$  представляет собой магнитный поток  $d\Phi = d\alpha d\beta$ , а  $Q_p d\alpha d\beta$  — число частиц в этом объеме с моментом  $M$  и продольным инвариантом  $J$ .

Для стационарного состояния, подставляя выражения (4.44) и (4.45) в уравнение (4.52), получаем

$$\frac{\partial H_{\parallel}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial Q_p}{\partial \beta} - \frac{\partial H_{\parallel}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial Q_p}{\partial \alpha} = 0. \quad (4.53)$$

Уравнения (4.44) — (4.46) — канонические уравнения с гамильтонианом  $H_{\parallel}$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  играют роль обобщен-

ных координат и импульсов соответственно. Таким образом, из формулы (2.59) следует, что  $Q_p$  можно считать постоянной при движении в плоскости продольного инварианта, т. е. в плоскости с определенными значениями  $J$ ,  $M$  и  $H_{\parallel}$ . В дальнейшем будут исследованы некоторые свойства таких плоскостей.

Используем полученные результаты для изучения плотности частиц  $n(\rho, \vec{H}_{\parallel}, M, t)$  в конфигурационном пространстве. Если вдоль данной силовой линии выполнены условия стационарности движения, то плотность частиц можно записать следующим образом

$$n = \frac{n_1 B}{u_{\parallel}}, \quad (4.54)$$

т. е. плотность частиц обратно пропорциональна продольной скорости движения  $u_{\parallel}$  и площади поперечного сечения силовой трубки. Определим теперь величину  $n_1$ , постоянную вдоль данной силовой линии. Для этого проинтегрируем выражение (4.54) вдоль силовой линии между двумя точками отражения

$$\int \frac{nds}{B} = \frac{1}{2} n_1 t_{\parallel}. \quad (4.55)$$

Силовая трубка с площадью поперечного сечения  $dS = dad\beta/B$  и длиной  $ds$  содержит  $ndS ds$  частиц. Полное число частиц внутри всей силовой трубки между точками отражения равно  $N_f(\alpha, \beta, H_{\parallel}, M, t) dad\beta$ . Из уравнения (4.55) легко найти  $N_f = 1/2 n_1 t_{\parallel}$ . Число частиц в элементе объема  $dad\beta$  с магнитным моментом  $M$  и со значением продольного инварианта  $J$  в интервале  $J, J + dJ$  равно  $Q_p dJ dad\beta$  или  $N_f dH_{\parallel} dad\beta$ , где дифференциалы  $dJ$  и  $dH_{\parallel}$  связаны между собой. Отсюда величины  $N_f$  и  $Q_p$  связаны следующим соотношением:  $N_f dH_{\parallel} = Q_p dJ$  или  $N_f = Q_p (\partial J / \partial H_{\parallel})$ . Из уравнения (4.43) следует, что  $N_f / t_{\parallel} = Q_i$ .

Таким образом, соотношение (4.54) можно переписать в виде

$$n = 2 \frac{B}{u_{\parallel}} Q_p. \quad (4.56)$$

Так как в стационарном состоянии величина  $Q_p$  постоянна на плоскости продольного инварианта, то из



формулы (4.56) видно, что плотность частиц  $n$  на этой плоскости пропорциональна  $B/u_{\parallel}$ . В отсутствие электрического поля  $u_{\parallel}$  зависит только от  $B$  при фиксированных значениях  $J$ ,  $M$  и  $H_{\parallel}$ . Таким образом, если в плоскости продольного инварианта выбрать контур, на котором постоянно магнитное поле  $B$ , то на этом контуре плотность частиц  $n$  также будет постоянной.

### 1. 5. Поточковый инвариант

В результате усреднения точных уравнений движения частицы по быстрому ларморовскому вращению получаются уравнения движения ведущего центра (3.16), которые в качестве параметра содержат адиабатический инвариант  $M$ . Далее, усреднение уравнений движения ведущего центра по быстрым продольным осцилляциям приводит к уравнениям (4.44) и (4.45) для усредненного дрейфового движения, в которые продольный адиабатический инвариант  $J$  входит как параметр. Можно, однако, показать, что если движение в пространстве  $(\alpha, \beta, H_{\parallel})$  периодическое, то усреднение дрейфовых уравнений приводит к появлению третьего инварианта  $\Phi$ .

Сначала рассмотрим стационарное земное магнитное поле, причем нарушение симметрии будем считать малым (рис. 4.6). В отсутствие дополнительных силовых полей энергия частицы, а следовательно, и ее полная скорость  $\omega_0$  остаются постоянными согласно уравнению (2.38). Из сохранения магнитного момента  $M = mW^2/2B$  следует

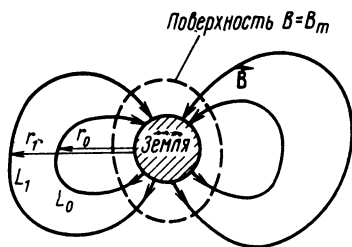


Рис. 4.6. Магнитное поле Земли, совпадающее приблизительно с магнитным полем диполя. На рисунке указана поверхность, где величина напряженности магнитного поля постоянна и равна  $B_m$ .

$$u_{\parallel}^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{B}{B_m} \right). \quad (4.57)$$

Здесь  $B_m$  — величина магнитного поля в тех точках, где происходит отражение частицы, осциллирующей вдоль магнитных силовых линий. Если частица движется в магнитном поле Земли (см. рис. 4.6), то точки отражения частиц находятся в плоскости  $B = B_m$ . Для дипольного поля среднее значение продольной скорости  $u_{\parallel}$  вдоль силовой линии, вычисленное при помощи формулы (4.57), увеличивается с ростом экваториального расстояния  $r_0$  данной силовой линии. Так как длина дуги между точками отражения  $B = B_m$  при этом тоже возрастает, то, очевидно, продольный инвариант  $J$  увеличится с ростом  $r_0$ , так что величина  $J$  на силовой линии  $L_1$  больше  $J$  на силовой линии  $L_0$  при  $r_1 > r_0$ . Если асимметрия конфигурации магнитного поля незначительна, то приведенные рассуждения справедливы по крайней мере качественно. В работе [78] было показано, что силовым линиям  $L_0$  и  $L_1$  соответствуют различные значения продольного инварианта  $J$ . Поэтому частица после полного оборота вокруг всей конфигурации из-за постоянства  $J$  должна вернуться на ту же силовую линию (см. рис. 4.6). Время полного оборота обозначим  $t_{\perp}$ .

Таким образом, мы показали, что в указанном стационарном случае среднее поперечное движение вокруг конфигурации магнитного поля приблизительно периодически. При этом поверхность, по которой движется частица с заданным значением  $J$ , как раз и является поверхностью продольного адиабатического инварианта.

Если теперь магнитное поле слабо меняется за время полного обхода  $t_{\perp}$ , то движение системы будет приблизительно периодическим по отношению к усредненному дрейфовому движению, которое описывается уравнениями (4.44) — (4.47). В пространстве  $(\alpha, \beta, s)$  это дрейфовое движение происходит по некоторой цилиндрической поверхности, перпендикулярной плоскости  $\alpha\beta$  (рис. 4.7). Величина площади, вырезаемой цилиндрической поверхностью в плоскости  $\alpha\beta$ , равна магнитному потоку  $\Phi$ , охватываемому траекторией частицы при движении в конфигурационном пространстве. Высота цилиндра для некоторых  $\alpha, \beta$  в пространстве  $(\alpha, \beta, s)$  равна длине вдоль магнитной силовой линии между двумя точками отражения. При движении частицы в конфигурационном пространстве соответствующая точка в пространстве

$(\alpha, \beta, s)$  осциллирует вдоль образующей цилиндра между его концами и одновременно дрейфует по поверхности цилиндра (см. рис. 4.7). Покажем теперь, что «захваченный» магнитный поток  $\Phi$  остается постоянным, если время  $t_{\perp}$  мало по сравнению с характерным временем изменения магнитного поля. Это означает, что медленный дрейф частицы в пространстве  $(\alpha, \beta, s)$ , происходящий в направлении, перпендикулярном поверхности продольного инварианта, компенсируется за период  $t_{\perp}$ . Этот эффект аналогичен обращению в нуль величины  $dJ/dt$  при усреднении по периоду продольных колебаний.

Предположим, что в некоторый момент времени частица находится на участке  $dl$ , причем она одновременно совершает быстрое движение вдоль контура в плоскости  $\alpha\beta$  и медленно дрейфует под прямым углом к  $dl$ . Обозначим  $(J, M, H_{\parallel})_0$  инвариантную поверхность, на которой величины  $J$ ,  $M$  и  $H_{\parallel}$  сохраняют свои первоначальные значения.

Затем определим скорость  $\vec{Y}(l, l')$ , перпендикулярную элементу длины  $dl'$ , которая переводит точку  $l'$  с поверхности продольного инварианта  $(J, M, H_{\parallel})_0$  на новую поверхность  $(J, M, H_{\parallel})_1$  за такое время  $dt$ , которое необходимо для такого же перемещения реальной частицы, находящейся в точке  $l$  и движущейся со скоростью  $(\langle \dot{\alpha} \rangle, \langle \dot{\beta} \rangle)$ . Скорость  $\vec{Y}$  аналогична скорости  $\vec{V}_{\perp}$  на рис. 4.5. Значения  $J$  и  $M$  на поверхностях, которые обозначены на рис. 4.7 индексами 0 и 1, одинаковы, а значения  $H_{\parallel}$  разные.

Так как  $J$  и  $M$  можно приближенно считать постоянными, а  $H_{\parallel}$  не зависит от координаты  $s$ , то производная  $H_{\parallel}$  по времени в точке  $l$ , усредненная по дрейфо-

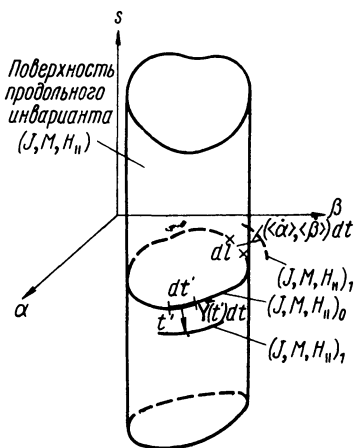


Рис. 4.7. Движение частицы в конфигурационном пространстве с координатами  $(\alpha, \beta, s)$ .

вому движению, в соответствии с определением  $\vec{Y}$  равна

$$\langle \dot{H}_{\parallel} \rangle_t = \frac{\partial}{\partial t} H_{\parallel}(l') + \vec{Y}(l, l') \vec{\nabla}_{\alpha\beta} H_{\parallel}(l'). \quad (4.58)$$

Здесь  $\nabla_{\alpha\beta}$  обозначает градиент в плоскости  $\alpha\beta$ .

Так как величина  $H_{\parallel}$  постоянна вдоль замкнутой кривой, изображенной на рис. 4.7, то вектор  $\vec{\nabla}_{\alpha\beta} H_{\parallel}(l')$  направлен перпендикулярно элементу длины этой кривой  $dl'$ . В системе координат, связанной с некоторой точкой  $l$  траектории частицы, мгновенная скорость изменения площади, охватываемой этой траекторией (т. е. мгновенная скорость изменения магнитного потока), равна сумме всех вкладов от смещений  $\vec{Y}(l, l') dt$  в различных точках  $l'$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint \frac{\vec{Y}(l, l') \vec{\nabla}_{\alpha\beta} H_{\parallel}(l')}{|\vec{\nabla}_{\alpha\beta} H_{\parallel}(l')|} dl'. \quad (4.59)$$

Подставляя в выражение (4.59) из уравнений (4.58), (4.44)—(4.46)  $\vec{Y} \cdot \vec{\nabla}_{\alpha\beta} H_{\parallel}$ ,  $V_{\alpha\beta} \equiv [\langle \dot{\alpha} \rangle^2 + \langle \dot{\beta} \rangle^2]^{1/2}$  и  $\partial H_{\parallel} / \partial t$ , получаем

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint [\langle \dot{H}_{\parallel} \rangle_t - \langle \dot{H}_{\parallel} \rangle_{l'}] \frac{dl'}{V_{\alpha\beta}}, \quad (4.60)$$

где штрих означает, что соответствующая величина вычислена в точке  $l'$ . Таким образом, мгновенное изменение потока не равно нулю. Однако для полного периода дрейфового движения вблизи поверхности продольного адиабатического инварианта среднее значение  $d\Phi/dt$  ввиду антисимметрии подинтегрального выражения оказывается равным нулю

$$\left\langle \frac{d\Phi}{dt} \right\rangle = \oint \oint [\langle \dot{H}_{\parallel} \rangle_t - \langle \dot{H}_{\parallel} \rangle_{l'}] \frac{dl dl'}{V_{\alpha\beta} V'_{\alpha\beta}} = 0. \quad (4.61)$$

Это означает, что вклад дрейфового движения вне инвариантной поверхности компенсируется за полный период  $t_{\perp}$ . Это аналогично компенсации в рассмотренном ранее случае продольного инварианта  $J$ . Уравнение (4.61) показывает, что поток  $\Phi$  — адиабатический инвариант усредненного дрейфового движения. Существова-

ние этого инварианта связано с тем, что силовые линии медленно меняющегося магнитного поля почти заморожены в плазму.

#### **§ 4. 2. ИНВАРИАНТНОСТЬ В ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ. ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА**

В § 4.1 мы видели, что можно определить так называемые адиабатические инварианты, которые сохраняются по крайней мере в первом приближении. Однако в реальных физических задачах ларморовский радиус и ларморовский период не являются бесконечно малыми величинами по сравнению с длиной волны и периодом электромагнитного поля. Следовательно, определенные выше величины не будут уже точными интегралами движения. Поэтому, чтобы найти изменение величины адиабатического инварианта, рассмотрим члены высшего порядка по параметру адиабатичности. Хеллвиг [65] доказал, что эквивалентный магнитный момент сохраняется с точностью до членов второго порядка. В работе [81] решена задача о гармоническом осцилляторе с медленно меняющейся упругостью. При этом оказалось, что адиабатический инвариант сохраняется с точностью до членов любого порядка. Аналогичный результат получили Крускал [46] для вращающейся частицы и Ленард [82] для гармонического осциллятора. Гарднер [74] установил, что для всякой простой периодической системы адиабатический инвариант сохраняется с точностью до членов любого порядка, и применил этот результат к продольному инварианту  $J$ .

Здесь ограничимся одномерным случаем. Изучению трехмерных задач будет посвящен § 4.3. Приведенное исследование некоторых одномерных задач основано на результатах работ [19, 62, 83].

#### **2. 1. Определение адиабатической инвариантности**

Одномерная задача сводится к уравнению

$$\ddot{\zeta} + \omega^2(t)\zeta = 0 \quad (4.62)$$

для осциллирующей системы. Координата  $\zeta(t)$  представляет собой отклонение от равновесия, а  $\omega(t)$  — мгновен-

ное значение частоты колебаний. Мы уже упоминали о примере такого типа (см. гл. 2), когда частица вращается в однородном магнитном поле, зависящем от времени, причем  $\omega^2 = \frac{1}{4} \omega_g^2$ . Точно таким же уравнением

описывается произвольный гармонический осциллятор с медленно меняющейся упругостью, например маятник, подвешенный на нити, длина которой постепенно меняется, а также продольные колебания частицы вдоль оси системы с медленно меняющимся полем магнитных пробок. Колебания частицы описываются при этом уравнением (4.6), в котором  $E_{\parallel} = 0$ . Если магнитное поле  $B(s)$  пропорционально  $s^2$  и, следовательно, возвращающая сила  $-M(\partial B/\partial s)$  оказывается пропорциональной  $s$  при  $M = \text{const}$ , то это уравнение совпадает с уравнением (4.62). При произвольной функциональной зависимости  $B(s)$  уравнение (4.6) аналогично уравнению ангармонического осциллятора.

Для систем, которые можно описывать уравнением (4.62), введем понятие адиабатической инвариантности подобно тому, как это было сделано Чандрасекаром [19]. Исследуем переход системы из начального состояния ( $\omega(t) \rightarrow \omega_0$  при  $t \rightarrow -\infty$ ) в конечное состояние ( $\omega(t) \rightarrow \omega_f$  при  $t \rightarrow +\infty$ ). В этом случае будем считать, что производные  $d^v \omega/dt^v$  исчезают для всех  $v \geq 1$ , если  $t \rightarrow \pm \infty$ . В этих двух предельных случаях  $\omega$  постоянно, и поэтому для них нетрудно решить уравнение (4.62):

$$\begin{aligned} \zeta(t \rightarrow -\infty) &= C_{10} \exp(-i\omega_0 t) + a_{10} \exp(i\omega_0 t), \\ \zeta(t \rightarrow +\infty) &= C_{1f} \exp(-i\omega_f t) + a_{1f} \exp(i\omega_f t), \end{aligned} \quad (4.63)$$

где  $C_{10}$ ,  $C_{1f}$ ,  $a_{10}$ ,  $a_{1f}$  — комплексные постоянные. Для одномерного гармонического осциллятора смещение задается величиной  $\zeta$ , а кинетическая и потенциальная энергии определяются выражениями  $|\dot{\zeta}|^2$  и  $\omega^2 |\zeta|^2$ , средние значения которых за период колебаний равны. Таким образом, каждая из этих величин равна половине полной энергии, причем последняя пропорциональна  $\omega^2 \langle |\zeta|^2 \rangle$ . Адиабатический инвариант, равный отношению энергии к частоте, пропорционален  $\omega \langle |\zeta|^2 \rangle$ .

Например, для продольных колебаний частицы между двумя магнитными пробками, когда магнитное поле пропорционально  $B(s) \sim \zeta^2 s^2$ , отношение энергии к частоте

пропорционально  $t_{\parallel} \langle u_{\parallel}^2 \rangle$ . Здесь  $u_{\parallel} = d\zeta/dt$  — продольная скорость, а  $t_{\parallel}$  — период продольных колебаний. Поэтому рассматриваемое отношение пропорционально также продольному инварианту  $J$ , определяемому соотношением (4.9), т. е. величине  $\omega \langle |\dot{\zeta}|^2 \rangle$ , так как  $\omega = 2\pi/t_{\parallel}$ . Наконец, рассмотрим вращение частицы в однородном магнитном поле, зависящем от времени. Поперечное движение частицы можно описывать уравнением (4.63) для начального и конечного состояний (см. гл. 2)

$$\zeta_1 = x + iy = \zeta \exp[i(\omega t + \text{const})] \quad (t \rightarrow \pm \infty). \quad (4.64)$$

Таким образом,  $C_{10}$ ,  $C_{1f}$  и  $a_{10}$ ,  $a_{1f}$  совпадают соответственно с положением ведущего центра и с ларморовским радиусом.

Пользуясь выводами гл. 2 и формулой (4.64), получим, что эквивалентный магнитный момент равен отношению кинетической энергии ларморовского движения к частоте, т. е.

$$M_0 = \frac{q}{2\omega_0} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)_0 = \frac{q}{2\omega_0} \langle |\dot{\zeta}_1|^2 \rangle_0 \quad (4.65)$$

в начальном состоянии. Аналогичное соотношение существует и для конечного состояния. Напомним, что  $|\dot{\zeta}_1|^2 = |\dot{\zeta} + i\omega\zeta|^2$  равно  $4\omega_0^2 a_{10}^2$  и  $4\omega_f^2 a_{1f}^2$  соответственно в начальном и конечном состояниях. Поэтому  $(1/\omega) \langle |\dot{\zeta}_1|^2 \rangle$  по существу совпадает с  $\omega a^2$ , причем ларморовский радиус  $a$  имеет смысл «среднего смещения» частицы по отношению к центру вращения. Если пренебречь движением центра вращения, положив в уравнении (4.63)  $C_{10} = C_{1f} = 0$ , то, очевидно,  $(1/\omega) \langle |\dot{\zeta}_1|^2 \rangle$  станет просто равно величине  $\omega \langle |\dot{\zeta}|^2 \rangle$  для вращающейся частицы.

Во всех приведенных примерах выражения

$$\Lambda = \frac{\omega_f \langle |\zeta|^2 \rangle_{t \rightarrow +\infty}}{\omega_0 \langle |\zeta|^2 \rangle_{t \rightarrow -\infty}} \quad \text{и} \quad \Lambda = \frac{1/\omega_f \langle |\dot{\zeta}_1|^2 \rangle_{t \rightarrow +\infty}}{1/\omega_0 \langle |\dot{\zeta}_1|^2 \rangle_{t \rightarrow -\infty}} \quad (4.66)$$

служат мерой отклонения от адиабатической инвариантности. Если первое выражение (4.66) подходит для изучения простого гармонического осциллятора, то послед-

нее имеет более удобную форму для изучения движения заряженных частиц в магнитном поле. Специфические особенности этого движения рассмотрим в разделах 2.2 и 2.3.

Величина  $\Lambda$  зависит от того, как частота  $\omega(t)$  изменяется от значения  $\omega_0$  до  $\omega_f$ . Предположим, что производная  $d\omega/dt$  ограничена, и определим следующее характерное время:

$$\left| \frac{\omega}{d\omega/dt} \right|_{\text{мин}} = t_\omega. \quad (4.67)$$

Тогда точная формулировка теоремы об адиабатической инвариантности сведется к утверждению, что  $\Lambda$  стремится к единице, когда  $t_\omega \rightarrow \infty$ , т. е. когда изменение внешних параметров становится бесконечно медленным. Это утверждение не накладывает никаких ограничений на отношение частот  $\omega_f/\omega_0$ . Однако при этом различают два случая.

1. Относительное изменение частоты при таком переходе мало, так что можно ввести величину

$$\delta = \frac{1}{2} \left| \frac{\omega_f - \omega_0}{\omega_f + \omega_0} \right| \ll 1. \quad (4.68)$$

Если к тому же можно показать, что  $\Lambda = 1 + O(\delta^2)$  при  $t_\omega \rightarrow \infty$ , то имеет место адиабатическая инвариантность «в малом».

2. Если же  $\Lambda \rightarrow 1$  при  $t_\omega \rightarrow \infty$ , но нет никаких ограничений на отношение  $\omega_f/\omega_0$ , то имеет место адиабатическая инвариантность «в большом». Это же можно сформулировать несколько по-другому. Пусть  $\omega \equiv \omega(\varepsilon t)$  представляет собой зависящее от времени однопараметрическое семейство, которое удовлетворяет требованиям, перечисленным в начале этого параграфа.

Тогда величина  $\Lambda$  зависит от  $\varepsilon$ , и адиабатическая инвариантность в большом имеет место в том случае, когда  $\Lambda(\omega_0, \omega_f, \varepsilon t) \rightarrow 1$  независимо от  $\omega_0$  и  $\omega_f$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Нетрудно показать, что для системы, которая описывается уравнением (4.62), существует адиабатическая инвариантность в малом. Пусть

$$t_1 = \int \omega dt, \quad dt_1 = \omega dt, \quad (4.69)$$



тогда уравнение (4.62) примет вид:

$$\frac{d^2 \zeta}{dt_1^2} + \zeta = - \left( \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt_1} \right) \frac{d\zeta}{dt_1}. \quad (4.70)$$

Это уравнение можно решить методом последовательных приближений, т. е. сначала решить уравнение без правой части, а затем найти поправку к этому решению, связанную с наличием малой правой части. Выберем  $\zeta = \text{const} \cdot \exp(it_1)$  в качестве решения уравнения (4.70) при  $t_1 \rightarrow -\infty$ , когда малыми членами в правой части уравнения можно пренебречь. Затем подставим это решение в правую часть уравнения (4.70) и из полученного уравнения найдем такое решение, которое стремится к  $\exp(it_1)$ , когда  $t_1 \rightarrow -\infty$  и  $\omega \rightarrow \omega_0$ :

$$\zeta = \left( 1 - \frac{1}{2} \lg \frac{\omega}{\omega_0} \right) \exp(it_1) + P(t_1) \exp(-it_1). \quad (4.71)$$

При этом мы ввели обозначение

$$P(t_1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{t_1} \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt_1'} \exp(2it_1') dt_1'. \quad (4.72)$$

Усредняя  $|\zeta|^2$  по всем возможным начальным фазам, получаем в конечном состоянии, когда  $t_1 \rightarrow +\infty$ , следующее соотношение:

$$\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \{ \omega \langle |\zeta|^2 \rangle \} = \omega_f \left( 1 - \frac{1}{2} \lg \frac{\omega_f}{\omega_0} \right)^2 + \omega_f |P(\infty)|^2, \quad (4.73)$$

где введено обозначение  $P(\infty) \equiv P(t_1 = +\infty)$ . Теперь из первого соотношения (4.66) следует

$$\Lambda = \frac{\omega_f}{\omega_0} \left( 1 - \frac{1}{2} \lg \frac{\omega_f}{\omega_0} \right)^2 + \frac{\omega_f}{\omega_0} |P(\infty)|^2. \quad (4.74)$$

Если полное изменение частоты  $\delta\omega = \omega_f - \omega_0$  мало, то, пользуясь определением  $\delta$  из условия (4.68), получим соотношение

$$O[(\delta\omega)^2] = O(\delta^2)$$

и

$$\Lambda = 1 + O(\delta^2) + \frac{\omega f}{\omega_0} |P(\infty)|^2. \quad (4.75)$$

В предельном случае бесконечно медленного изменения  $\omega(t)$  величина  $t_\omega$ , определенная выражением (4.67), стремится к нулю. В этом случае  $P(\infty)$  обращается в нуль, и из соотношения (4.75) следует, что существует адиабатическая инвариантность в малом.

Труднее установить адиабатическую инвариантность в большом для этой системы. После введения новой переменной  $\zeta_2 = \sqrt{\omega} \zeta$  уравнение (4.70) примет следующий вид

$$\frac{d^2 \zeta_2}{dt_1^2} + \zeta_2 = -G_1 \zeta_2, \quad (4.76)$$

где

$$G_1(t_1) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt_1} \right)^2 - \frac{1}{2\omega} \cdot \frac{d^2\omega}{dt_1^2}. \quad (4.77)$$

Заметим, что  $G_1$  определяется полным изменением  $\omega(t)$  при переходе из начального состояния в конечное и является величиной второго порядка малости по  $(1/\omega)(d\omega/dt_1)$  в отличие от правой части уравнения (4.70).

Аналогично предыдущему [см. уравнение (4.70)] решим уравнение (4.67) методом последовательных приближений.

Решение этого уравнения, которое при  $t \rightarrow -\infty$  стремится к  $\exp(it_1)$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \zeta_2 = \exp(it_1) + \frac{1}{2} i \left\{ \exp(it_1) \int_{-\infty}^{t_1} G_1(t'_1) dt'_1 - \exp(-it_1) \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{t_1} G_1(t'_1) \exp(2it'_1) dt'_1 \right\}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

Для случая медленного изменения параметров введем новую независимую переменную  $\varepsilon t_1 = \tau_1$  вместо  $t_1$  и исследуем полученное решение при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В конечном

состоянии  $t_1 \rightarrow +\infty$  решение (4.78) принимает следующий вид:

$$\zeta_2(+\infty) = \exp(it_1) + \frac{1}{2} i\varepsilon \exp(it_1) \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\tau_1) d\tau_1 - \\ - \frac{1}{2} i\varepsilon \exp(-it_1) \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\tau_1) \exp\left(\frac{2i\tau_1}{\varepsilon}\right) d\tau_1, \quad (4.79)$$

где  $G_1(\tau_1)$  совпадает с определенной выше функцией (4.77), в которой  $t_1$  заменено  $\tau_1$ . Если входящие в выражение (4.79) интегралы существуют, то в конечном состоянии при  $t \rightarrow +\infty$   $\zeta_2 \rightarrow \exp(it_1)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Таким образом, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  величина  $\Lambda(\omega_0, \omega_f, \varepsilon t)$  стремится к единице, откуда и следует адиабатическая инвариантность в большом.

Это доказательство позволяет установить адиабатическую инвариантность в большом, однако не дает точного выражения для поправочного члена при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Это связано с тем, что в данном случае метод последовательных приближений не обеспечивает равномерной сходимости решения (4.78) во всей области изменения  $t_1$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В разделе 2.3 мы еще вернемся к оценке величины поправочного члена для одного частного случая.

## 2. 2. „Скачок“ магнитного поля

Для некоторых частных случаев отклонения от адиабатической инвариантности можно вычислить в явном виде.

Рассмотрим, например, задачу о движении заряженной частицы в однородном магнитном поле, которое в некоторый момент времени получает конечное приращение от величины  $B_0 = m\omega_0/q$  до  $B_f = m\omega_f/q$  [62]. Если уравнение (2.138), переписанное в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\zeta_1}{dt} + i\omega \zeta_1 \right) - \frac{1}{2} i \frac{d\omega}{dt} \zeta_1 = 0, \quad (4.80)$$

проинтегрировать по времени, то получим

$$\frac{d\zeta_1}{dt} + i\omega \zeta_1 - \frac{1}{2} i \int^t \frac{d\omega}{dt} \zeta_1 dt = c_1, \quad (4.81)$$

где  $c_1$  — постоянная. Так как положение частицы  $\zeta_1$  не меняется за тот бесконечно малый промежуток времени, когда частота  $\omega$  скачком увеличивается от  $\omega_0$  до  $\omega_f$ , то из уравнения (4.81) следует, что

$$\frac{d\zeta_1}{dt} + i\omega_0\zeta_1 = c_1 \quad (t < 0) \quad (4.82)$$

и

$$\frac{d\zeta_1}{dt} + i\omega_f\zeta_1 - \frac{1}{2}i(\omega_f - \omega_0)\zeta_1(0) = c_1 \quad (t > 0). \quad (4.83)$$

Здесь  $\zeta_1(0)$  есть величина  $\zeta_1$  при  $t=0$ . Теперь вычислим величину  $\Lambda$ , определенную при помощи последней формулы (4.66). Так как  $\omega$  постоянно при всех  $t$ , за исключением  $t=0$ , то и  $|\dot{\zeta}_1|^2$  постоянно при всех  $t$ , кроме  $t=0$ , а  $\zeta_1$  при  $t=0$  непрерывно и равно  $\zeta_1(0)$ . Отклонение величины  $\Lambda$  от единицы, связанное со скачком  $\omega$ , можно легко найти, вычислив величину  $d\zeta_1/dt$  при помощи уравнений (4.82) и (4.83), справедливых соответственно при  $t < 0$  и  $t > 0$ . В частности, при  $c_1=0$  начальное значение  $\zeta_1$  равно  $\exp(-i\omega_0 t)$ , что соответствует определенному выбору фазы в момент  $t=0$ . Таким образом,

$$\Lambda = \frac{(\omega_0 + \omega_f)^2}{4\omega_0\omega_f} = 1 + \frac{(\omega_0 - \omega_f)^2}{4\omega_0\omega_f}. \quad (4.84)$$

Поскольку при  $t=0$  частота  $\omega$  меняется скачком, то условие (3.2) перестает выполняться и адиабатическая инвариантность нарушается.

### 2. 3. Медленно меняющееся магнитное поле

Как следует из рассмотрения адиабатической инвариантности в большом (см. раздел 2.1), магнитный момент  $M$  частицы в однородном магнитном поле  $B$  является точной константой движения только в пределе бесконечно медленного изменения магнитного поля. Определим, как велико отклонение магнитного момента частицы от постоянной величины в том случае, когда изменение магнитного поля  $B$  происходит за конечный промежуток времени. Для этого воспользуемся методом,

который развит в работе [62]. Введем новую переменную  $y_1$  при помощи следующего соотношения:

$$\zeta = \exp \left[ i \int \frac{y_1 + 1}{y_1 - 1} dt_1 \right]. \quad (4.85)$$

Тогда уравнение (4.70) примет вид

$$\frac{dy_1}{dt_1} - 2iy_1 + \frac{1}{2\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt_1} (1 - y_1^2) = 0 \quad (4.86)$$

или

$$\dot{y}_1 - 2i\omega y_1 + \frac{1}{2} \frac{\dot{\omega}}{\omega} (1 - y_1^2) = 0, \quad (4.87)$$

если ввести  $dt_1 = \omega dt$  согласно выражению (4.69), а точкой сверху обозначить производную по времени  $t$ . Теперь предположим, что магнитное поле остается постоянным в течение начального интервала  $-\infty < t \leq t_0$  и конечного интервала времени  $t_f < t < \infty$ . Оно изменяется только в интервале  $t_0 < t < t_f$ . В дальнейшем ограничимся малым значением величины  $y_1^2$  по сравнению с единицей. Это предположение достаточно разумно, так как решением уравнения (4.70) в однородном и постоянном магнитном поле служит  $\zeta = \text{const} \cdot \exp(\pm it_1)$ , а при медленном изменении магнитного поля выражение (4.85) должно лишь ненамного отклоняться от этого решения. Пренебрегая членом  $y_1^2$ , получим общее решение уравнения (4.87)

$$y_1(t) = -P(t_0, t) \exp \left( 2i \int_{t_0}^t \omega dt' \right), \quad y_1(t_0) = 0, \quad (4.88)$$

$$P(t_0, t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left( \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)_{t'} \exp \left( -2i \int_{t_0}^{t'} \omega dt'' \right) dt'. \quad (4.89)$$

Из уравнений (2.139), (4.85), (4.88), (4.89) при помощи полученного решения можно вычислить величину  $\zeta$  при  $y_1^2 \ll 1$ . Опустим все детали вычислений, которые приведены в оригинальной работе [62]. Усредняя по всем возможным фазам начального состояния, которое определяется величиной  $\zeta_1(t \rightarrow -\infty)$ , можно получить

$$\Lambda = 1 + [1 + c_1^2] |P(-\infty, +\infty)|^2 \quad (4.90)$$

для перехода из начального в конечное состояние. В работе [63] вычислено точное значение величины  $c_1$  из формулы (4.90). При этом оказалось, что  $c_1 \sim 1$ . Не-

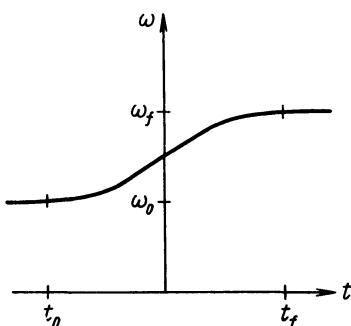


Рис. 4.8. Изменение величины  $\omega$  во времени.

трудно показать, что интеграл  $P(-\infty, +\infty)$  — трансформанта Фурье некоторой функции. Для этого введем вместо  $t_1$  новую переменную  $\tau_1 = \varepsilon t_1$  и исследуем, как и в разделе 2.1, случай медленно меняющегося ( $\varepsilon$  мало) магнитного поля. Предположим также, что  $\omega(t)$  меняется от постоянного значения  $\omega_0$  до другого постоянного значения  $\omega_f$ , как это показано на рис. 4.8. Тогда из определения (4.89) следует

$$P(\varepsilon) \equiv P(-\infty, +\infty) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1) \exp\left(\frac{-iu_1}{\varepsilon}\right) du_1, \quad (4.91)$$

где

$$f(u_1) = \left[ \frac{d(\omega)}{d(\varepsilon t)} / \omega^2(\varepsilon t) \right]_{t(u_1)} \quad (4.92)$$

и

$$u_1 = \int_0^{\varepsilon t} \omega(\varepsilon t') d(\varepsilon t'), \quad \frac{du_1}{d(\varepsilon t')} = \omega > 0. \quad (4.93)$$

Пользуясь только выражением (4.91), трудно решить, чему будет равно  $P(\varepsilon)$  в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Теперь дополнительно предположим, что функция  $f(u_1 + iv_1)$  аналитическая и интегрируемая в полосе  $|v_1| < v_{1m}$  комплексной плоскости  $u_1 v_1$ . Произведем преобразование  $u_1 = u'_1 - i\varepsilon_m$ , где  $0 < \varepsilon_m < v_{1m}$ , причем  $\varepsilon_m$  — постоянная величина. Это означает, что путь интегрирования в интеграле (4.91) смещается с линии  $v_1 = 0$  на линию  $v_1 = \varepsilon_m$ .

Так как функция  $f$  интегрируема в этой области, получаем

$$|P(\varepsilon)| = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon}\right) \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1' - i\varepsilon_m) \exp\left(-\frac{i u_1'}{\varepsilon}\right) du_1' \right| \leq \\ \leq F_{\max} \exp\left(-\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon}\right), \quad (4.94)$$

где  $2F_{\max}$  — верхний предел интеграла (4.91). Если бы мы выбрали  $\varepsilon_m < 0$ , то получили бы неравенство, аналогичное неравенству (4.94), в правой части которого находится член, расходящийся в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Однако из такого неравенства нельзя сделать никакого вывода относительно величины  $|P(\varepsilon)|$ , хотя оно и не противоречит неравенству (4.94) при  $\varepsilon_m > 0$ . Из неравенства (4.94) следует, что величина  $|P(\varepsilon)|$  стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , по крайней мере, так же быстро, как  $\exp(-\varepsilon_m/\varepsilon)$ .

Величина  $\varepsilon/\varepsilon_m$  — отношение циклотронного периода к характерному времени изменения магнитного поля. Поэтому из соотношений (4.90) и (4.94) следует, что отклонение от адиабатической инвариантности становится очень малым, если это отношение много больше единицы. В работе [62] произведены подробные вычисления для частного случая, когда постоянная  $c_1$  в формуле (4.90) равна нулю, а

$$\omega(t) = \frac{1}{2} \omega_0 [3 + \text{th}(\varepsilon t)]. \quad (4.95)$$

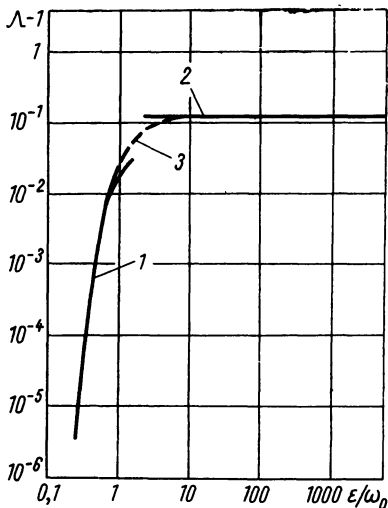


Рис. 4.9. Зависимость величины  $\Lambda-1$ , характеризующей отклонение от адиабатической инвариантности, от относительной скорости изменения магнитного поля  $\varepsilon/\omega_0$ .

1 — данные вычислены для медленных изменений (см. раздел 2.3); 2 — для быстрых изменений (см. раздел 2.2); 3 — с помощью численного интегрирования точного уравнения движения.

Результаты этих вычислений приведены на рис. 4.9, где показано изменение величины  $\Lambda - 1$ , которая характеризует отклонение от адиабатической инвариантности, в зависимости от относительной скорости изменения магнитного поля  $\epsilon/\omega_0$ . Ветвь 1 этой кривой получена в результате вычислений для медленного изменения магнитного поля, а ветвь 2 иллюстрирует результаты вычислений для мгновенного изменения магнитного поля (см. раздел 2.2). Величина  $\Lambda - 1$  становится очень малой по сравнению с единицей, когда  $\epsilon < \epsilon_0$ .

Теория, развитая Чандрасекаром [19], дает более точное решение настоящей задачи.

В заключение отметим, что в работе [84] получено решение задачи о колебаниях одномерного осциллятора для более общего случая, когда действующая на частицу возвращающая сила имеет сингулярности\*.

#### **§ 4. 3. ИНВАРИАНТНОСТЬ В ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ. ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА**

При движении в электромагнитном поле произвольного профиля частицы дрейфуют вдоль и поперек магнитных силовых линий. При этом заранее не ясно, можно ли изучать адиабатическую инвариантность в трехмерном случае теми же методами, которые использовались в § 2 при рассмотрении адиабатической инвариантности в одномерном случае. Вращение по ларморовской орбите, а также продольный и поперечный дрейфы не являются, вообще говоря, независимыми движениями. В связи с этим следует отметить найденные в работе [74] канонические преобразования, которые полезны при изучении точных уравнений движения. Как следует из гл. 3, применяя указанные канонические преобразования к точным уравнениям движения, можно показать, что движение частицы описывается тремя степенями свободы, каждая из которых совпадает соответственно с вращением по ларморовской орбите продольным и поперечным дрейфами. Пользуясь преобразованными уравнениями движения, Гарднер [74] показал, что изучать адиабатическую инвариантность в трех-

---

\* В работах [85] исследовано неадиабатическое движение заряженной частицы в различных переменных магнитных полях.—  
*Прим. перев.*



мерном случае можно при помощи тех же методов, которые использовались при изучении одномерного гармонического осциллятора. В этом параграфе ограничимся изложением теории эквивалентного магнитного момента при помощи интеграла действия, которая развита Крускалом [46]. Берковиц и Гарднер [70] показали, что выражение (3.6) для радиуса-вектора частицы  $\vec{\rho}(t)$  удовлетворяет точному уравнению движения (3.3). При этом для почти периодической системы можно определить интеграл действия (2.71), который имеет вид (4.2) и связан с тем, что решение (3.6) допускает введение функции  $\vartheta(t)$ , непосредственно связанной с вращением частицы по ларморовской орбите. Именно поэтому интеграл действия  $J$  (4.2) является точной константой. Отсюда следует, что, разлагая в ряд подынтегральное выражение в формуле (4.2), можно получить разложение для эквивалентного магнитного момента с точностью до любого порядка по параметру малости  $\varepsilon$ . Этот результат получается при подстановке  $\vec{\rho}$  и  $d\vec{\rho}/dt$  из выражения (3.6) в интеграл (4.2).

Теперь вернемся к результатам раздела 1.3 гл. 3. Складывая скалярные произведения вектора  $\vec{C}_1$  на обе части векторного равенства (3.32) и вектора  $\vec{S}_1$  на обе части векторного равенства (3.33), получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} (C_1^2 + S_1^2) \dot{\vartheta}^2 + 2\dot{\vartheta} (\vec{C}_1 \times \vec{S}_1) \cdot \vec{B} + 2\varepsilon \dot{\vartheta} (\vec{S}_1 \cdot \dot{\vec{C}}_1 - \vec{C}_1 \cdot \dot{\vec{S}}_1) + \\ + \varepsilon \vec{C}_1 \cdot (\dot{\vec{C}}_1 \times \vec{B}) + \varepsilon \vec{S}_1 \cdot (\dot{\vec{S}}_1 \times \vec{B}) - \varepsilon B (C_1^2 + S_1^2) \Delta\omega = \\ = O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (4.96)$$

где в уравнениях (3.32) и (3.33) использовано выражение (3.34) для силы  $\vec{F}$ .

Таким образом, в результате имеем

$$\begin{aligned} B (C_1^2 + S_1^2) \Delta\omega = \dot{\vec{C}}_1 \cdot [\vec{C}_1 \times (\vec{C}_1 \cdot \nabla) \vec{B}] + \dot{\vec{S}}_1 \cdot [\vec{S}_1 \times (\vec{S}_1 \cdot \nabla) \vec{B}] + \\ + \vec{C}_1 \cdot [(\vec{C}_1 \cdot \nabla) (\vec{C} \times \vec{B})] + \vec{S}_1 \cdot [(\vec{S}_1 \cdot \nabla) (\vec{C} \times \vec{B})], \end{aligned} \quad (4.97)$$

где все коэффициенты вычислены в центре вращения частицы.

Выражения

$$\vec{C}_1 = -\vec{S}_1 \times \widehat{B} + O(\varepsilon), \quad \vec{S}_1 = \vec{C}_1 \times \widehat{B} + O(\varepsilon) \quad (4.98)$$

в соответствии с уравнением (3.39) удовлетворяют уравнениям (3.35) и (3.36). Как было отмечено в разделе 1.3 гл. 3 в связи с формулой (3.37), члены более высокого порядка по  $\dot{\vartheta}$  нельзя определить из разложения (3.6), и поэтому их можно выбирать произвольно. Вид этих членов зависит от того, как мы определяем векторы  $\vec{C}_1$  и  $\vec{S}_1$ , связанные с вращением по ларморовской орбите [47].

Потребуем, чтобы векторы  $\vec{C}_1$  и  $\vec{S}_1$  удовлетворяли следующему условию:

$$\vec{C}_1 \cdot \dot{\vec{S}}_1 = O(\varepsilon). \quad (4.99)$$

Тогда, дифференцируя по времени уравнение (3.35), а также используя уравнения (4.99) и (4.98), получаем

$$\vec{C}_1 \cdot \dot{\vec{S}}_1 = -\dot{\vec{C}}_1 \cdot \vec{S}_1 + O(\varepsilon) = \vec{C}_1 \cdot (\dot{\vec{C}}_1 \times \widehat{B}) + O(\varepsilon). \quad (4.100)$$

Аналогичное уравнение можно получить также для величины  $\vec{S}_1 \cdot (\dot{\vec{S}}_1 \times \widehat{B})$ . Это означает, что выбрано такое представление, в котором  $\vec{C}_1$  и  $\dot{\vec{C}}_1$ , а также  $\vec{S}_1$  и  $\dot{\vec{S}}_1$  попарно почти параллельны, т. е. векторы  $\vec{C}_1$  и  $\vec{S}_1$  не вращаются вокруг  $\widehat{B}$ , а только меняют со временем свою величину в первом порядке по теории возмущений. Именно так выбраны векторы  $\vec{C}_1$  и  $\vec{S}_1$  в работе [65]. При этом, согласно условию (4.100), третий, четвертый и пятый члены в выражении (4.96) обращаются в нуль, и решение для  $\dot{\vartheta}$  принимает следующий вид:

$$\dot{\vartheta} = B + \varepsilon \nabla \omega + O(\varepsilon^2). \quad (4.101)$$

Справедливость этого решения легко установить, подставляя его в уравнение (4.96) и используя при этом условие (4.99).

Теперь вычислим интеграл действия, который определяется выражением (4.2). Пользуясь разложением (3.6), получаем

$$\begin{aligned}
 J^* = m \oint & \left[ \dot{\vec{C}} + \varepsilon \vec{C}_1 \cos \frac{\vartheta}{\varepsilon} + \varepsilon \vec{S}_1 \sin \frac{\vartheta}{\varepsilon} - \dot{\vartheta} \vec{C}_1 \sin \times \right. \\
 & \times \frac{\vartheta}{\varepsilon} + \dot{\vartheta} \vec{S}_1 \cos \frac{\vartheta}{\varepsilon} + \frac{q}{m\vec{A}} \vec{A} + O(\varepsilon^2) \Big]_t \left[ -\vec{C}_1 \sin \frac{\vartheta}{\varepsilon} + \right. \\
 & \left. + \vec{S}_1 \cos \frac{\vartheta}{\varepsilon} - 2\varepsilon \vec{C}_2 \sin \frac{2\vartheta}{\varepsilon} + 2\varepsilon \vec{S}_2 \cos \frac{2\vartheta}{\varepsilon} + \right. \\
 & \left. + O(\varepsilon^2) \right] d\vartheta = \text{const}, \quad (4.102)
 \end{aligned}$$

где индекс  $t$  означает, что время  $t$  следует считать постоянным всюду, где оно явно входит в выражения. Это значит, что при вычислении  $J^*$  производные от  $\vec{C}$ ,  $\vec{C}_1$  и  $\vec{S}_1$  по  $\vartheta$  исчезают. Интегрируя в формуле (4.102) по  $\vartheta$  в интервале от 0 до  $2\pi\varepsilon$ , получаем

$$\begin{aligned}
 J^* = \varepsilon m \pi \dot{\vartheta} (C_1^2 + S_1^2) + q \int_0^{2\pi\varepsilon} & \left[ \vec{A} \left( \vec{S}_1 \cos \frac{\vartheta}{\varepsilon} - \vec{C}_1 \sin \frac{\vartheta}{\varepsilon} \right) \right]_t \times \\
 & \times d\vartheta + O(\varepsilon^3) = \text{const}. \quad (4.103)
 \end{aligned}$$

При вычислении интеграла учитывалось, что  $\dot{\vec{C}}_1 \cdot \vec{S}_1$  и  $\vec{C}_1 \cdot \dot{\vec{S}}_1$  в первом порядке по параметру  $\varepsilon$  обращаются в нуль в соответствии с уравнением (4.100). Так как явная зависимость от времени  $t$  подынтегрального выражения в формуле (4.103) отсутствует, то интегрирование по  $\vartheta$  следует производить вдоль замкнутой орбиты. По теореме Стокса приведенный выше интеграл представляет собой полный магнитный поток через площадь,

которую замечает при движении вектор  $\vec{\rho}$  за один период по  $\vartheta$ . Соответствующий элемент поверхности равен

$$\begin{aligned} \widehat{ndS} &= -\frac{1}{2} \vec{\rho} \times (\vec{\rho} + d\vec{\rho}) = -\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial \vartheta} d\vartheta = \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon (\vec{C}_1 \times \vec{S}_1) d\vartheta + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (4.104)$$

где минус указывает на то, что положительно заряженная частица в магнитном поле  $\vec{B}$  вращается по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления магнитного поля. Используя выражение (3.7) для магнитного поля и выражение (4.104) для элемента поверхности, получаем по теореме Стокса следующее выражение для интеграла (4.103):

$$J^* = \varepsilon m \pi \dot{\vartheta} (C_1^2 + S_1^2) - \varepsilon m \pi \vec{B} \cdot (\vec{C}_1 \times \vec{S}_1) + O(\varepsilon^3) = \text{const.} \quad (4.105)$$

Из формул (4.98) и (3.35) следует

$$\vec{B} (\vec{C}_1 \times \vec{S}_1) = \frac{1}{2} (C_1^2 + S_1^2) + O(\varepsilon^2). \quad (4.106)$$

Поэтому формулу (4.105) можно переписать в следующем виде

$$\frac{J^*}{2\pi\varepsilon} = \frac{1}{2} m \left( \dot{\vartheta} - \frac{1}{2} B \right) (C_1^2 + S_1^2) + O(\varepsilon^2) = \text{const.} \quad (4.107)$$

где  $J^*/2\pi\varepsilon$  — среднее значение подынтегрального выражения в формуле (4.102). Среднюю величину квадрата скорости вращения  $\vec{W} = d\vec{a}/dt$  за период  $\vartheta = 2\pi\varepsilon$  легко получить при помощи разложения для вектора положения частицы (3.6)

$$\langle W^2 \rangle = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi\varepsilon} (\dot{\vec{a}})_t^2 d\vartheta = \frac{1}{2} \dot{\vartheta}^2 (C_1^2 + S_1^2) + O(\varepsilon^2). \quad (4.108)$$

Комбинируя формулы (4.101) и (4.108), для эквивалентного магнитного момента [48] найдем

$$M = \frac{mW^2}{2B} = \frac{1}{2} m \left( \dot{\vartheta} - \frac{1}{2} B \right) (S_1^2 + C_1^2) + O(\varepsilon^2). \quad (4.109)$$

Из уравнения (4.107) следует, что

$$M = \text{const} + O(\varepsilon^2). \quad (4.110)$$

Таким образом, мы получили явное выражение для магнитного момента  $M$  с точностью до членов первого порядка включительно по малому параметру  $\varepsilon$ . Этот результат показывает, что изменение магнитного момента  $M$  является, по крайней мере, величиной второго порядка по параметру  $\varepsilon$ .

Вообще при помощи разложений (3.6) и (4.2) можно получить уравнения для  $J^*$  с точностью до любого порядка по  $\varepsilon$ . Это и было сделано Крускалом [46], который показал, что мгновенное значение величины  $[\widehat{B} \times (\dot{\omega} \times \widehat{B}) - \dot{u}_E]^2/B$ , где  $\dot{\omega} = d\dot{\rho}/dt$  можно найти при помощи уравнения (3.6), является адиабатическим инвариантом с точностью до любого порядка по степеням  $\varepsilon$ . В следующем параграфе будет продолжено обсуждение некоторых вопросов, относящихся к понятию адиабатической инвариантности.

В последнее время [66] определение первого адиабатического инварианта было обобщено на релятивистский случай, а также на случай трех измерений. При этом использовался метод, предложенный Чандрасекаром [19].

#### **§ 4. 4. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ АДИАБАТИЧЕСКОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ**

Пусть осциллирующая система описывается амплитудами  $\zeta$  и  $\zeta_1$ , введенными в разделе 2.1 гл. 4 и разделе 4.4 гл. 2. Тогда определим величины  $\langle \omega |\zeta|^2 \rangle$  или  $\langle |\dot{\zeta}_1|^2 / \omega \rangle$ , которые представляют собой адиабатические инварианты. Общее определение адиабатической инвариантности можно ввести так, как это было сделано в разделе 2.1 гл. 4 [19, 66]. Такая формулировка адиабатической инвариантности является точной и не нуждается в дальнейших пояснениях.

Имеется, однако, и другой способ определения адиабатической инвариантности. Он связан с разложением динамических переменных в ряды по параметру  $\varepsilon$ , как это было сделано в разделах 3.1 и 4.3. Впервые

этот подход в теории адиабатических инвариантов был сформулирован в наиболее общем виде Ленардом [82] следующим образом.

Введем такой параметр  $\epsilon$ , чтобы при  $\epsilon \rightarrow 0$  неограниченно уменьшалась скорость изменения внешних параметров. Это означает, что при  $\epsilon \rightarrow 0$  ларморовский радиус вращения частицы и соответствующее время обращения становятся бесконечно малыми по сравнению с характерными масштабами изменения в пространстве и во времени электрического и магнитного полей.

Пусть, далее, можно найти такую положительную константу  $c_m$ , что для достаточно малой величины  $\epsilon$  изменение  $\Delta\chi$  некоторой величины  $\chi$  удовлетворяет неравенству

$$|\Delta\chi| < \epsilon^\nu c_m, \quad (4.111)$$

где  $\nu$  — положительное целое число. В этом случае говорят, что  $\chi$  — адиабатический инвариант с точностью до  $\nu$ -го порядка. Это означает, что изменение  $\Delta\chi$  величины  $\chi$  стремится к нулю по крайней мере также быстро, как величина  $\epsilon^\nu$ .

Если соотношение (4.111) справедливо для всех  $\nu$ , то считают, что величина  $\chi$  — адиабатический инвариант с точностью до любого порядка по  $\epsilon$ .

Предположим, что  $\Delta\chi$  зависит еще и от некоторого другого параметра. Если при этом величины  $\epsilon$  и  $c_m$  в неравенстве (4.111) можно выбрать независимо от этого параметра, то говорят, что  $\chi$  является адиабатическим инвариантом равномерно относительно этого параметра. Все эти положения можно проиллюстрировать при помощи формулы (4.110) для магнитного момента  $M$ . Так как величина  $\Delta M$  по крайней мере порядка  $\epsilon^2$ , то  $|\Delta M|/\epsilon^2 = \text{const}$  и магнитный момент  $M$  — адиабатический инвариант по крайней мере с точностью до второго порядка по  $\epsilon$ .

Заметим, следуя Крускалу [45], что сохранение адиабатического инварианта с точностью до любого порядка по  $\epsilon$  еще не эквивалентно точному постоянству величины, а означает просто, что изменение данной величины при  $\epsilon \rightarrow 0$  стремится к нулю быстрее любой степени  $\epsilon$ . Как отмечено в работе [81], это можно показать, используя функцию  $\chi = \chi_0 + \chi_1 \exp(-1/\epsilon)$ , где  $\chi_0$  и  $\chi_1$  — постоянные. Функция  $\chi$  является бесконечным рядом по степеням  $\epsilon$ ,

который начинается с постоянного члена  $\chi_0$ . Величина  $|\Delta\chi|/\varepsilon^\nu = |\chi_1 \exp(-1/\varepsilon)|/\varepsilon^\nu$  стремится к нулю для любой степени  $\nu$  при условии, что  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Поэтому в соответствии с настоящим определением  $\chi$  есть адиабатический инвариант с точностью до любого порядка по  $\varepsilon$ . Однако при конечном  $\varepsilon$  эту величину, разумеется, нельзя считать постоянной. В большинстве случаев, представляющих физический интерес, ларморовский радиус и соответствующее время обращения частицы по орбите являются, так же как и  $\varepsilon$ , конечными величинами. Поэтому, даже если некоторая величина и есть адиабатический инвариант с точностью до любого порядка соответствующего асимптотического разложения, мы не имеем прямой информации о том, насколько велико действительное отклонение данной величины от постоянной. Для получения такой информации нам необходимо аккуратно вычислить коэффициенты асимптотического разложения или воспользоваться методом, изложенным в разделе 2.3.

В заключение отметим, что нарушение адиабатической инвариантности возникает, когда нарушается основное предположение, сформулированное в разделе 3.3 гл. 2. Причиной такого нарушения адиабатической инвариантности может быть, например, резонансное взаимодействие между ларморовским движением и продольными колебаниями, которое было изучено в работе [86].

В результате такого взаимодействия появляется связь между этими двумя степенями свободы, так что соответствующие движения уже не могут больше считаться независимыми. Для изучения этих явлений необходимы специальные методы исследования.

**МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ**

До сих пор при изучении поведения ионизованного газа мы рассматривали только движение отдельных частиц. В этой главе мы продолжим изучение поведения плазмы, используя уравнение Больцмана. Таким образом, будет установлено соответствие между движением отдельных частиц и макроскопической жидкостной моделью. Для большого класса задач оба этих приближенных подхода дают одинаковые результаты.

Уравнения движения для моментов, которые используются в этой главе, можно получить из уравнения Больцмана умножением на различные степени скорости и последующим интегрированием по пространству скоростей. Так же как и в теории движения отдельных частиц, при макроскопическом подходе возникают эффекты, связанные с конечностью ларморовского радиуса. Однако при этом подходе возникает существенное ограничение, связанное с тем, что невозможно проследить за изменением состояния плазмы в пространстве скоростей. Такое изменение состояния плазмы можно исследовать только при помощи кинетического уравнения Больцмана — Власова.

Для того чтобы была справедлива гидродинамическая модель, необходимо предположить, что средний свободный пробег частиц и среднее время между столкновениями достаточно малы по сравнению с характерными масштабами изменения макроскопических величин в пространстве и времени [87].

Кроме этого предположения, совершенно необходимого для справедливости гидродинамической модели, в дальнейшем примем дополнительное предположение о локальном термодинамическом равновесии. Это предположение означает, что диссипативные эффекты будут оказывать лишь незначительное влияние на макроскопическое движение плазмы.



## § 5. 1. УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Подробный вывод уравнения Больцмана и соответствующих ему уравнений для моментов можно найти в монографиях [11, 88, 89]. Поэтому дадим только краткий обзор полученных результатов.

### 1. 1. Теорема Лиувилля

Рассмотрим газ, состоящий из  $N$  частиц, состояние которого можно задать при помощи  $3N$  пар  $(q_k, p_k)$  обобщенных координат и импульсов. Введем теперь  $6N$ -мерное фазовое пространство и будем считать газ единой системой с  $3N$  степенями свободы. Тогда состояние движения этой системы полностью определится заданием точки  $(q_1, \dots, q_{3N}, p_1, \dots, p_{3N})$  в  $6N$ -мерном фазовом пространстве. При этом соответствующий гамильтониан обозначим  $H(q_1, \dots, q_{3N}, p_1, \dots, p_{3N})$ . Далее рассмотрим ансамбль из большого числа тождественных систем, не взаимодействующих друг с другом. В некоторый момент времени  $t=0$  зададим в  $6N$ -мерном фазовом пространстве точки, каждая из которых представляет собой некоторую систему определенного нами ансамбля в начальном состоянии. Исследуем теперь, как движется эта совокупность точек в фазовом пространстве в зависимости от времени. Так как число систем в ансамбле фиксировано, то точки в фазовом пространстве не могут возникать или исчезать. Следовательно, мы можем рассматривать точки в фазовом пространстве как некоторый «газ» без источников и стоков и записать соответствующее «уравнение непрерывности». Если ввести плотность точек в фазовом пространстве  $F$ , то получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3N} \left[ \frac{\partial}{\partial q_k} (F \dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial p_k} (F \dot{p}_k) \right] = \\ = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где мы использовали канонические уравнения (2.56) и (2.57), а скобки Пуассона во втором равенстве определены аналогично выражению (2.59) для  $k=1, \dots, 3N$ . Уравнение (5.1) представляет собой теорему Лиувилля.

Так как второе равенство в соответствии с выражением (2.59) имеет вид полной производной по времени  $dF/dt$  от  $F$ , то очевидно, что фиктивный газ фазовых точек движется в  $6N$ -мерном фазовом пространстве подобно несжимаемой жидкости.

Рассмотрим теперь физический газ, который состоит из очень большого числа  $N$  частиц. Предположим, что взаимодействие между частицами достаточно мало, так что им можно пренебречь. Тогда частицы можно рассматривать как совокупность  $N$  систем, взаимодействие между которыми полностью отсутствует. Введем функцию распределения  $f(q_k, p_k, t)$  для ансамбля таких систем в шестимерном фазовом пространстве  $(q_k p_k)$ . В этом случае по аналогии с выражением (5.1) теорему Лиувилля запишем в следующем виде:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0. \quad (5.2)$$

## 1. 2. Уравнение Власова

Перейдем теперь от фазового пространства  $q_k p_k$  к пространству  $q_k \omega_k$ , которое окажется более удобным в дальнейшем при выводе уравнений движения [23].

Используя прямоугольную систему координат и комбинируя уравнения (5.2), (2.61) и (2.62), получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega_j \frac{\partial f}{\partial a_j} + \left( q \omega_k \frac{\partial A_k}{\partial q_j} - q \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} - m \frac{\partial \varphi_g}{\partial q_j} \right) \frac{\partial f}{\partial p_j} = 0. \quad (5.3)$$

Для перехода от  $(q_k, p_k, t)$  к  $(q'_k, \omega'_k, t')$  произведем следующие преобразования:

$$q_k = q'_k, \quad p = m\omega'_k + qA_k, \quad t = t', \quad (5.4)$$

где

$$\frac{\partial q'_k}{\partial q_j} = \delta_{kj}, \quad \frac{\partial q'_k}{\partial p_j} = 0, \quad \frac{\partial q'_k}{\partial t} = 0, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega'_k}{\partial q_j} &= -\frac{q}{m} \cdot \frac{\partial A_k}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial \omega'_k}{\partial p_j} = \frac{\delta_{kj}}{m}, \quad \frac{\partial \omega'_k}{\partial t} = \\ &= -\frac{q}{m} \cdot \frac{\partial A_k}{\partial t}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial t'}{\partial q_j} = 0, \quad \frac{\partial t'}{\partial p_j} = 0, \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = 1. \quad (5.7)$$

Частную производную от  $f$  по  $q_j$  можно представить в виде

$$\frac{\partial f}{\partial q_j} = \frac{\partial f}{\partial q'_k} \cdot \frac{\partial q'_k}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial \omega'_k} \cdot \frac{\partial \omega'_k}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial q_j}, \quad (5.8)$$

причем аналогичные формулы имеют место для  $\partial f/\partial p_j$  и  $\partial f/\partial t$ . Вычисляя эти выражения и подставляя их в уравнение (5.3), получаем

$$D_{\omega} f \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} f + \frac{1}{m} (\vec{F} + q\vec{\omega} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla}_{\omega} f = 0, \quad (5.9)$$

где штрихи опущены, а  $\vec{\nabla}_{\omega} = \left( \frac{\partial}{\partial \omega_x}, \frac{\partial}{\partial \omega_y}, \frac{\partial}{\partial \omega_z} \right)$  означает градиент в пространстве скоростей. В полученном уравнении  $\vec{\rho}$ ,  $\vec{\omega}$ ,  $t$  следует считать независимыми переменными.

Уравнение (5.9) является уравнением Власова (или бесстолкновительным уравнением Больцмана). Простые физические соображения показывают, что наличие ускорения, связанного с внешней силой  $\vec{F} + q\vec{\omega} \times \vec{B}$ , соответствует некоторой «скорости» в пространстве скоростей, так что возникающее движение происходит без источников и стоков, которые могут быть связаны только с столкновениями.

При наличии столкновений в каждом элементарном объеме пространства  $q_h \omega_h$  возникает дополнительный уход рассеянных частиц, а также приход частиц из других частей пространства  $q_h \omega_h$ . При этом уравнение (5.9) переходит в уравнение Больцмана

$$D_{\omega} f := \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ст}}, \quad (5.10)$$

где член в правой части уравнения представляет собой связанное со столкновениями полное увеличение числа частиц в единичном объеме пространства  $q_h \omega_h$  за единицу времени. Точное выражение для столкновительного члена в уравнении (5.10) можно получить, используя выражение для силы взаимодействия между частицами

в гамильтониане (5.1). При этом плотность  $F$  в фазовом пространстве необходимо проинтегрировать по координатам и импульсам всех частиц, за исключением одной.

В дальнейшем рассмотрим только такие задачи, когда столкновительная диссипация незначительна и, следовательно, при выводе гидродинамических уравнений можно воспользоваться уравнением (5.9). В то же время будем считать столкновения достаточно эффективными для того, чтобы они могли привести к установлению локальной функции распределения вида  $f=f(\rho, \vec{w}, t)$ . Эти два утверждения не противоречат друг другу. Физически это означает, что в плазме столкновения между частицами происходят настолько часто, что они обеспечивают установление локального максвелловского распределения; но в то же время они достаточно редки, так что столкновительная диссипация лишь очень слабо влияет на макроскопическое движение плазмы.

### 1. 3. Макроскопические законы сохранения

Определим плотность  $n(\rho, t)$  данного сорта частиц как функцию координат и времени

$$n = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int f(\rho, \vec{w}, t) dw_x dw_y dw_z, \quad (5.11)$$

где  $f$  — соответствующая функция распределения. Аналогично можно определить среднюю величину (или момент) произвольной функции  $\chi(\rho, \vec{w}, t)$ , умножая ее на функцию распределения и усредняя по пространству скоростей

$$\bar{\chi} = \frac{1}{n(\rho, t)} \int \int \int \chi f dw_x dw_y dw_z. \quad (5.12)$$

Умножим каждый член уравнения (5.9) на  $\chi$  и проинтегрируем по пространству скоростей:

$$\int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \chi \frac{\partial f}{\partial t} dw_x dw_y dw_z = \frac{\partial}{\partial t} (n\bar{\chi}) - n \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t}, \quad (5.13)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \chi (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) f d\omega_x d\omega_y d\omega_z = \operatorname{div} (\overline{n\chi\vec{\omega}}) - \overline{n\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}\chi}, \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \frac{\chi}{m} (\vec{F} + q\vec{\omega} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla}_w f d\omega_x d\omega_y d\omega_z = \\ = -\frac{n}{m} \overline{\nabla_w [(F + q\vec{\omega} \times B)\chi]}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Уравнения (5.13) — (5.15) получаем в результате интегрирования по частям. При выводе уравнения (5.15) предполагалось, что при  $|\vec{\omega}| \rightarrow \infty$  произведение  $\chi(\vec{F} + q\vec{\omega} \times \vec{B})f$  стремится к нулю. Это предположение оказывается справедливым для всех функций распределения, имеющих физический смысл. Используя три последних выражения, получим следующее уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} (n\bar{\chi}) + \vec{\nabla} \cdot (\overline{n\chi\vec{\omega}}) - n \left[ \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} + \overline{\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}\chi} + \right. \\ \left. + \frac{1}{m} \overline{(\vec{F} + q\vec{\omega} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla}_w \chi} \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

справедливое, если столкновениями можно пренебречь. Кроме того, при выводе этого уравнения мы считали, что единственным членом в полной внешней силе, который зависит от скорости, является  $q\vec{\omega} \times \vec{B}$ . Легко убедиться, что  $k$ -я компонента этой силы не зависит от  $\omega_k$ , так что дивергенция в пространстве скоростей от этого члена тождественно равна нулю.

Если положить  $\chi=1$ , то получается уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} (n\vec{v}) = 0, \quad (5.17)$$

где средняя скорость  $\vec{v} = \overline{\vec{\omega}}$  определена в соответствии с уравнением (5.12). Если положить  $\chi = m v_k$ , то получается уравнение движения, которое выражает баланс импульса в направлении  $k$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} (n m v_k) + \operatorname{div} (\overline{n m \omega_k \vec{\omega}}) - n (\vec{F} + q\vec{v} \times \vec{B})_k = 0. \quad (5.18)$$

Следует отметить, что в уравнении (5.9), а также при выводе выражений (5.13)—(5.15) переменные  $(\vec{\rho}, \vec{\omega}, t)$  считались независимыми. Таким образом,  $\partial\omega_k/\partial t=0$  и  $(\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\omega_k=0$ . Так как  $\vec{F}$  и  $\vec{B}$  не зависят от  $\vec{\omega}$ , то  $\vec{F}=\vec{F}$  и  $\vec{B}=\vec{B}$ . Введем отклонение  $\vec{\tilde{\omega}}=\vec{\omega}-\vec{v}$  скорости  $\vec{\omega}$  от ее среднего значения  $\vec{v}$ . Из определения средней скорости следует, что  $\vec{\tilde{\omega}}=0$ . Теперь определим при помощи  $\vec{\tilde{\omega}}$  тензор давления

$$\pi = (\pi_{jk}), \quad \pi_{jk} = nm\tilde{\omega}_j\tilde{\omega}_k, \quad \vec{\tilde{\omega}} = \vec{\omega} - \vec{v}. \quad (5.19)$$

Уравнение (5.18) перепишем в следующем виде:

$$nm \left[ \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} \right] = n(\vec{F} + q\vec{v}\times\vec{B}) - \text{div } \pi, \quad (5.20)$$

причем мы использовали уравнение непрерывности (5.17). Рассмотрим важный частный случай, когда можно пренебречь недиагональными элементами тензора давления в системе координат, одна из осей которой направлена вдоль магнитного поля  $\vec{B}$ .

В этом случае давление анизотропно, причем его величина в направлении, параллельном магнитной силовой линии и перпендикулярном ей, равна соответственно  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$ . Напишем тензор давления при помощи единичного вектора  $\hat{B}=\vec{B}/B$ , направленного вдоль магнитного поля [90, 91]

$$\pi_{jk} = p_{\parallel} \hat{B}_j \hat{B}_k + p_{\perp} (\delta_{jk} - \hat{B}_j \hat{B}_k). \quad (5.21)$$

Дивергенция этого тензора равна

$$\begin{aligned} \text{div } \pi &= \hat{B} [(\hat{B}\cdot\vec{\nabla}) p_{\parallel} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \text{div } \hat{B}] + \\ &+ [\vec{\nabla} - \hat{B}(\hat{B}\cdot\vec{\nabla})] p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\hat{B}\cdot\vec{\nabla}) \hat{B}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Воспользовавшись тождеством  $B \operatorname{div} \widehat{\vec{B}} = -(\widehat{\vec{B}} \cdot \vec{\nabla}) B$ , а также выражениями для продольного и поперечного градиентов

$$\vec{\nabla}_{\parallel} = \widehat{\vec{B}} (\widehat{\vec{B}} \cdot \vec{\nabla}), \quad \vec{\nabla}_{\perp} = \vec{\nabla} - \vec{\nabla}_{\parallel}, \quad (5.23)$$

перепишем выражение для дивергенции в виде

$$\operatorname{div} \pi = \vec{\nabla}_{\parallel} p_{\parallel} - \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B} \vec{\nabla}_{\parallel} B + \vec{\nabla}_{\perp} p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \times \\ \times (\widehat{\vec{B}} \cdot \vec{\nabla}) \widehat{\vec{B}}. \quad (5.24)$$

Первые два вектора в правой части этого выражения направлены вдоль магнитного поля  $\vec{B}$ , а последние два, как легко видеть из уравнения (3.21), перпендикулярны  $\vec{B}$ . В частном случае изотропного давления  $p_{\parallel} = p_{\perp}$  и

$$\operatorname{div} \pi = \vec{\nabla} p, \quad (5.25)$$

где  $p$  — скаляр.

Обратимся теперь к уравнению сохранения энергии. Полагая в общем уравнении (5.16)  $\chi = \frac{1}{2} m \omega_k^2$ , получим

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (nmv_k^2) + \frac{1}{2} \operatorname{div} (nmv_k^2 \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial t} (nmU_{(k)}) + \\ + \operatorname{div} (nmU_{(k)} \vec{v}) + \operatorname{div} \vec{Q}_{(k)} + \operatorname{div} (nmv_k \overline{\vec{\omega}_k}) - \\ - n(\vec{F} + q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}_k - nq(\overline{\vec{\omega}_k} \times \vec{B}) \cdot \vec{\omega}_k = 0, \quad (5.26)$$

где  $U_{(k)} = \frac{1}{2} \overline{\omega_k^2}$  обозначает тепловую энергию, приходящуюся на единицу массы, а вектор

$$\vec{Q}_{(k)} = \frac{1}{2} nm \overline{\omega_k^2 \vec{\omega}_k} \quad (5.27)$$

поток тепла, связанный со скоростью  $\vec{\omega}_k = \widehat{\omega}_k \widehat{k}$  в направлении  $k$ . Шестой член в уравнении (5.26) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (nm \overline{v_k \vec{\omega}_k}) &= \\ &= \operatorname{div} (\vec{v}_k \cdot \pi) - \vec{v}_k \operatorname{div} \pi \equiv \pi : \vec{\nabla} v_k, \end{aligned} \quad (5.28)$$

где  $\pi : \vec{\nabla}$  обозначает произведение тензора давления (5.19) на оператор  $\vec{\nabla}$ . Умножим теперь уравнение (5.18) на  $\vec{v}_k$  и вычтем полученный результат из уравнения (5.26). Тогда, используя выражение (5.17) для уравнения непрерывности, получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (nm U_{(k)}) + \operatorname{div} (nm U_{(k)} \vec{v}) + \operatorname{div} \vec{Q}_{(k)} + \pi : \vec{\nabla} v_k - \\ - nq (\vec{\omega}_k \times \vec{\omega}) \cdot \vec{B} = 0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

которое представляет собой закон сохранения энергии, связанной с движением вдоль направления  $k$ .

Для полной кинетической энергии  $U_{(\text{попер})} = \frac{1}{2} \overline{\vec{\omega}^2}$ , приходящейся на единицу массы, получим при помощи выражения (5.29) уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} (nm U_{(\text{попер})}) + \operatorname{div} (nm U_{(\text{попер})} \vec{v}) + \operatorname{div} \vec{Q} + \pi : \vec{\nabla} v = 0, \quad (5.30)$$

в котором используется выражение для вектора полного потока тепла

$$\vec{Q} = \frac{1}{2} nm \overline{\vec{\omega}^2 \vec{\omega}}. \quad (5.31)$$

В частном случае, когда тензор давления характеризуется двумя скалярными величинами  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$ , согласно формуле (5.21), получим

$$\pi : \vec{\nabla} v_k = (p_{\parallel} - p_{\perp}) \widehat{B} (\widehat{B} \cdot \vec{\nabla}) v_k + p_{\perp} \operatorname{div} \vec{v}_k. \quad (5.32)$$



Предположим далее, что состояние плазмы изменяется адиабатически, т. е. потоком тепла можно пренебречь. Нетрудно показать, что в этом случае уравнение (5.30), выражающее сохранение полной тепловой энергии, принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) (p_{\parallel} + 2p_{\perp}) + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \widehat{B} (\widehat{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \\ + \frac{1}{2} (p_{\parallel} + 4p_{\perp}) \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (5.33)$$

В то же время, используя уравнение (5.29) с  $\vec{\omega}_k = \vec{v}_{\parallel} = \widehat{B} \cdot \vec{v}_{\parallel}$  и имея в виду, что  $\widehat{B} (\widehat{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_{\parallel} = \operatorname{div} \vec{v}_{\parallel}$ , мы получим уравнение сохранения тепловой энергии в продольном направлении

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) p_{\parallel} = -2p_{\parallel} \widehat{B} (\widehat{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - p_{\parallel} \operatorname{div} \vec{v}, \quad (5.34)$$

которое, очевидно, следует также из уравнения (5.33) при условии, что  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$  не зависят друг от друга. Вычитая уравнение (5.34) из уравнения (5.33), получаем уравнение сохранения тепловой энергии в поперечном направлении

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) p_{\perp} = p_{\perp} \widehat{B} (\widehat{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - 2p_{\perp} \operatorname{div} \vec{v}. \quad (5.35)$$

Адиабатические соотношения (5.34) и (5.35) впервые получили Чу, Гольдбергер и Лоу [90]. Чепмен и Каулинг [11], Маршал [92] и Кауфман [93] включили в гидродинамические уравнения члены, связанные с вязкостью, причем Кауфману [93] удалось найти физическую интерпретацию этих членов для движения отдельных частиц. Если частота столкновений между одинаковыми частицами становится значительно меньше соответствующей циклотронной частоты, то плазма в магнитном поле ведет себя как сильно анизотропная среда. Поэтому компоненты силы трения, перпендикулярные направлению сильного магнитного поля, значительно уменьшаются.

В настоящей главе при выводе основных уравнений мы предполагали, что диссипативные эффекты, связан-

ные со столкновениями, очень малы, так что они не дают заметного вклада в уравнение (5.16). Кроме того, необходимо считать, что средний свободный пробег частицы и среднее время между столкновениями малы по сравнению с характерным масштабом изменения макроскопических величин в пространстве и времени. Если же эти условия не выполняются, то уравнение (5.16) обычно неприменимо, а выражение для функции распределения становится тогда очень сложным. Лишь в некоторых частных случаях, например, когда свойства плазмы однородны вдоль силовых линий магнитного поля, можно пользоваться гидродинамическими уравнениями плазмы при описании движения, перпендикулярного направлению магнитных силовых линий [87, 94].

#### **1. 4. Приближенное решение уравнения Власова**

Уравнение Власова (5.9) можно решить методом последовательных приближений, представляя решение в виде ряда по степеням некоторого параметра малости  $\epsilon$ . Опять предположим (см. § 3.1), что магнитное поле и поле приложенных сил меняются достаточно медленно в соответствии с условиями (3.1), (3.2) и (3.34). При этом мы ограничимся лишь кратким изложением некоторых результатов, которые были получены в работах [92, 95]. Полагая  $\vec{F} = q\vec{E}$ , запишем уравнение Власова

$$\begin{aligned}
 -(\vec{E}_\perp + \vec{\omega} \times \vec{B}) \vec{\nabla}_w f = \epsilon \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) f + \right. \\
 \left. + \frac{E_\parallel}{\epsilon} \cdot \frac{\partial f}{\partial \omega_\parallel} \right], \quad \epsilon = \frac{m}{q}.
 \end{aligned}
 \tag{5.36}$$

Заметим, что отношение  $E_\parallel/\epsilon$  должно быть величиной нулевого или более высокого порядка малости по  $\epsilon$  в соответствии с уравнением (3.34). Произведем преобразование в пространстве скоростей, вводя вместо  $(\vec{\rho}, \vec{\omega}, t)$  другие независимые переменные  $(\vec{\rho}, \vec{\omega}', t)$ , где скорость  $\vec{\omega}'$  определяется следующим образом

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega} - \vec{u}', \tag{5.37}$$

причем

$$\vec{E}_\perp + \vec{u}' \times \vec{B} = 0. \quad (5.38)$$

В низшем порядке по параметру малости  $\vec{\omega}'_\perp$  оказывается равной скорости вращения частицы  $\vec{W}$ .

Введем полярные координаты в пространстве скоростей

$$\vec{\omega}'_\perp = \omega'_\perp (\cos \varphi, \sin \varphi). \quad (5.39)$$

В результате этих преобразований уравнение (5.36) примет следующий вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial \varphi} = \frac{\varepsilon}{B} Df, \quad (5.40)$$

где оператор  $D$  определяется как

$$\begin{aligned} Df = D'f - (D'\vec{u}') \frac{\partial f_i}{\partial \vec{\omega}'} - \vec{\omega}' (D'\hat{B}) \frac{\partial f_i}{\partial \vec{\omega}'_\parallel} + \\ + \omega'_\parallel (D'\hat{B}) \frac{\partial f_i}{\partial \vec{\omega}'} + \frac{E_\parallel}{\varepsilon q} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \omega'_\parallel}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

причем

$$D' = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{\omega}' + \vec{u}') \cdot \vec{\nabla}, \quad (5.42)$$

а  $\partial/\partial \vec{\omega}' \equiv \vec{\nabla}'_{\omega}$ . Члены в правой части уравнения (5.40) первого порядка по параметру  $\varepsilon$ . Поэтому если пренебречь правой частью этого уравнения, то можно получить решение  $f_0$  в нулевом порядке по этому параметру.

Соответствующее решение можно представить в следующем общем виде

$$f_0 = f_0(\omega'^2_\perp, \omega'_\parallel, \rho, t), \quad (5.43)$$

так как оно не зависит от  $\varphi$ . Заметим теперь, что если уравнение (5.40) записать в безразмерном виде, то параметр  $\varepsilon$  окажется по порядку величины равным

$1/\omega_g t_c \ll 1$ . Поэтому можно разложить  $f$  в ряд по степеням  $\varepsilon$

$$f = \sum_{\nu} \varepsilon^{\nu} f^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, \dots). \quad (5.44)$$

Подставляя это разложение в уравнение (5.40), получаем соотношение, которое должно выполняться при любом значении  $\varepsilon$ , а следовательно, оно будет выполнено для каждого отдельного члена, пропорционального определенной степени  $\varepsilon$ , т. е.

$$\frac{\partial f^{(\nu)}}{\partial \varphi} = \left[ \frac{1}{\omega_g(\vec{\rho}, t)} \right] Df^{(\nu-1)}, \quad (\nu = 1, 2, \dots). \quad (5.45)$$

Теперь из формул (5.43) — (5.45) получим решение этого уравнения с точностью до первого порядка по параметру  $\varepsilon$ :  $f_1 = f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)}$ , где  $f^{(0)} = f_0$ , а

$$f^{(1)} = g_1(\omega'_{\perp}, \omega'_{\parallel}, \vec{\rho}, t) + \frac{1}{\omega_g} \int Df_0 d\varphi. \quad (5.46)$$

Так как найденное решение должно быть периодическим по переменной  $\varphi$ , то на  $f_0$  нужно наложить условие периодичности, т. е.

$$\int_0^{2\pi} Df_0 d\varphi = 0. \quad (5.47)$$

При помощи этого соотношения частное решение  $f_1$  неоднородного уравнения, описываемое последним членом в уравнении (5.46), можно записать в другом виде. На каждом этапе решения уравнения методом последовательных приближений на полученное решение следует накладывать указанное условие периодичности.

Мы не будем подробно выводить окончательного выражения для  $f_1$ . Однако следует отметить, что функцию  $f_1$  можно использовать при вычислении компоненты тензора давления, образуя моменты с различными компонентами скорости согласно уравнениям (5.19) и (5.12).

Если ось  $z$  направлена вдоль магнитного поля  $\vec{B}$ , которое с достаточной степенью точности можно считать однородным, то для поля скоростей, расположенных

в плоскости  $xy$ , компоненты тензора давления, можно записать в виде [95, 96]

$$\pi_{xx} = p_{\perp} - \frac{1}{4} nm\omega_g \bar{a}^2 \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \quad (5.48)$$

$$\pi_{yy} = p_{\perp} + \frac{1}{4} nm\omega_g \bar{a}^2 \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \quad (5.49)$$

$$\pi_{xy} = \pi_{yx} = \frac{1}{4} nm\omega_g \bar{a}^2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right). \quad (5.50)$$

В уравнениях (5.48)–(5.50)  $p_{\perp}$  — поперечное скалярное давление в нулевом порядке по параметру  $\varepsilon$ , а  $a$  — ларморовский радиус частицы. В наинизшем порядке по параметру  $\varepsilon$  поперечную гидродинамическую скорость жидкости  $\vec{v}_{\perp}$  в уравнениях (5.48)–(5.50) можно заменить скоростью электрического дрейфа  $\vec{u}_E$ .

## § 5. 2. СВЯЗЬ МЕЖДУ МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ И МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИЯМИ

Как дрейфовая теория (см. гл. 3), так и гидродинамическая теория, изложенная в настоящей главе, основаны на бесстолкновительном уравнении движения для отдельных частиц. Поэтому они представляют собой два эквивалентных метода исследования. В настоящем параграфе попытаемся установить связь между двумя этими методами, а также выяснить некоторые кажущиеся противоречия, которые возникают при сравнении дрейфовых уравнений с гидродинамическими уравнениями плазмы [12, 13, 25, 68, 97–100].

### 2. 1. Уравнение движения

Установим связь между уравнением движения (5.20) и соотношениями (3.47) и (3.49), полученными в дрейфовой теории. Для этого разделим уравнение (5.20) на продольную и поперечную части

$$nm \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right]_{\parallel} = n\vec{F}_{\parallel} - \text{div } \pi_{\parallel} \quad (5.51)$$

и

$$\begin{aligned} n\vec{v}_{\perp} = & (\pi\vec{F} - \text{div } \pi) \times \frac{\vec{B}}{qB^2} - \\ & - nm \left[ \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] \times \frac{\vec{B}}{qB^2}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

где последнее уравнение получено из уравнения (5.20) векторным умножением на  $\vec{B}$ . При этом следует исключить из рассмотрения предельный случай  $\vec{B}=0$ . Отметим, что производная  $\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$ , определенная при помощи средней гидродинамической скорости движения  $\vec{v}$ , не обязательно равна полной производной по времени  $\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$ , определенной по дрейфовой скорости отдельных частиц; они различаются между собой, так как  $\vec{v}$  и  $\vec{u}$  не равны друг другу.

Ограничимся рассмотрением тензора давления (5.21), который характеризуется двумя скалярными величинами  $p_{\parallel} = 2nK_{\parallel}$  и  $p_{\perp} = nK_{\perp}$ . Здесь  $K_{\parallel}$  и  $K_{\perp}$  обозначают соответствующие тепловые энергии, определенные согласно уравнению (3.45). Предположим, что средняя скорость  $u_{\parallel}$  мала по сравнению с тепловой скоростью  $(\tilde{u}_{\parallel}^2)^{1/2}$ . Используя выражение (5.24), преобразуем уравнение (5.52)

$$\begin{aligned} n\vec{v}_{\perp} = & n\vec{F} \times \frac{\vec{B}}{qB^2} + n(K_{\perp} - 2K_{\parallel})(\nabla B - \hat{B} \times \text{rot } \vec{B}) \times \\ & \times \frac{\vec{B}}{qB^3} - \nabla(nK_{\perp}) \times \frac{\vec{B}}{qB^2} - nm \frac{d\vec{u}_{\perp}}{dt} \times \frac{\vec{B}}{qB^2} - \\ & - nm \left[ \frac{\partial\vec{v}_g}{\partial t} + (\vec{v}_g \cdot \nabla)(\vec{v}_g + \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{v}_g \right] \times \frac{\vec{B}}{qB^2}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

При этом скорость

$$\vec{v}_g = \vec{v} - \vec{u} = \vec{v} - \vec{u}_{\parallel} - \vec{u}_{\perp} \quad (5.54)$$

представляет собой некоторую часть средней массовой скорости движения  $\vec{v}$ , связанную лишь с вращением

частицы  $\vec{W}$ , но не зависящую от средней скорости ведущих центров частиц  $\vec{u}$ . При выводе уравнения (5.53) величина  $(\vec{du}/dt)$  выражена при помощи соотношений (3.19)—(3.21). Инерционный член  $u_{\parallel} (\vec{du}_{\parallel}/dt)$  связан с кривизной силовых линий магнитного поля.

Этот член приводит к появлению множителя 2 перед  $K_{\parallel}$  в уравнении (5.53). Возможно, вклад от последнего члена в уравнении (5.53), пропорциональный скорости  $v_g$ , будет пренебрежимо мал по сравнению с другими членами. Однако если пренебречь им совсем, то в некоторых случаях получается неправильный результат. Примеры таких случаев мы рассмотрим в разделах 2.4 и 2.5 гл. 8.

Сравнивая уравнение (3.47), полученное в первом порядке дрейфовой теории, с уравнением (5.53), можно обнаружить полное соответствие между ними в нулевом приближении, если пренебречь тепловым движением  $K_{\parallel}=0$ ,  $K_{\perp}=0$  и положить  $v_g=0$ . При этом для справедливости полученного результата необходимо, чтобы средняя продольная дрейфовая скорость  $\vec{u}_{\parallel}$  была того же порядка, что и  $\vec{v}_{\perp}$  и  $\vec{v}$ . Это согласуется также с последним уравнением (3.34).

При выполнении некоторых условий уравнения (3.47) и (5.53) совпадают и в первом порядке по параметру  $\epsilon$ .

Заметим прежде всего, что инерционный член в уравнении (5.52) является величиной порядка  $\epsilon$  по сравнению с членами левой части этого же уравнения. Далее воспользуемся тем, что отношение членов  $\text{div } \pi$  и  $n\vec{F}$  в уравнении (5.52) порядка  $kT_c/L_{cs} F_c$ , где  $T_c$ ,  $F_c$  и  $L_c$  — характерные значения соответственно температуры, поля сил, а также пространственного масштаба, на котором изменяется тензор давления.

При некоторых условиях, представляющих физический интерес, указанное отношение может стать достаточно малым. Возможно, например, при  $\vec{F}=q\vec{E}=-q\nabla\Phi$ , когда энергия ларморовского вращения частицы мала по сравнению с работой электрического поля  $\vec{E}$  на некоторой длине, характерной для распределения давления.

Тогда в низшем порядке по параметру  $\epsilon$  уравнения (5.52) и (5.54) можно записать в виде

$$\vec{v} \approx \vec{v}_{\parallel} + \vec{F} \times \frac{\vec{B}}{qB^2}, \quad \vec{v}_{\parallel} \approx \vec{u}_{\parallel}, \quad \vec{v}_g = 0(\epsilon), \quad (5.55)$$

причем эти уравнения справедливы лишь в том случае, если величина  $\text{div } \pi$  мала по сравнению с  $n\vec{F}$ . Отметим, что это утверждение становится неверным, когда тепловая скорость значительно превышает скорость макроскопического движения, а также когда вклад в полный поток частиц, связанный с тензором давления, равен по порядку величины вкладу в полный поток частиц от дрейфа ведущих центров. В этом случае скорость  $\vec{v}_g$  уже нельзя считать величиной первого порядка. Таким образом, уравнения (3.47) и (5.53) согласуются между собой в первом порядке по параметру  $\epsilon$  только в том случае, когда  $\vec{v}_g$  оказывается величиной первого или более высокого порядка по отношению к  $\vec{v}_{\perp}$ .

Мы не можем рассматривать приближения более высокого порядка, так как уравнение (3.47) выведено только с точностью до членов первого порядка по параметру  $\epsilon$ . В § 3.2 было показано, что поток ведущих центров частиц не обязательно равен потоку самих частиц. Более подробно это будет рассмотрено в разделе 2.3 настоящей главы. Действительно, связанная с движением ведущих центров сила инерции не обязательно равна скорости изменения импульса, заключенного в единице объема ионизованного газа. Эта скорость определяется не только ускорением ведущих центров, но и изменением импульса, который связан с движением частицы по ларморовской орбите. Это изменение импульса описывается последним членом в уравнении (5.53).

Для того чтобы получить более точные уравнения, описывающие динамику ионизованной материи, необходимо вычислить члены более высокого порядка по параметру  $\epsilon$  не только в уравнениях для дрейфа ведущих центров, но и в уравнениях для ларморовского вращения частиц. Это можно показать на примерах (см. разделы 2.4 и 2.5 гл. 8), в которых существенны эффекты, связанные с градиентом плотности и конеч-



ностью ларморовского радиуса. В дальнейшем будет показано, что в горячей плазме вклад от тензора давления, который связан с последними членами в уравнениях (5.53) и (5.48)—(5.50), может оказаться существенным.

Обратимся теперь к изучению продольного движения. Используя определения  $p_{\parallel} = 2nK_{\parallel}$  и  $p_{\perp} = nK_{\perp}$ , а также выражение (5.24) для продольной компоненты вектора  $\text{div } \pi$ , нетрудно убедиться, что уравнение (5.51) полностью согласуется с результатом (3.49) дрейфовой теории.

Следовательно, из картины движения отдельных частиц и из гидродинамической модели следуют уравнения движения, которые согласуются друг с другом в рамках тех приближений, которые лежат в основе дрейфовой теории в первом порядке по параметру.

Мы видели, что гидродинамические уравнения движения получить сравнительно легко, в то время как для нахождения аналогичных результатов в дрейфовой теории необходимо использовать большое число предположений и, кроме того, проводить довольно трудоемкие вычисления.

Но это не означает, что макроскопический подход свободен от трудностей. В действительности и при макроскопическом подходе возникают различные проблемы, главная из которых касается определения тензора давления. Как показано в разделе 1.4, вид тензора давления существенно меняется при учете высших приближений по параметру  $\epsilon$ . В этом случае давление нельзя уже считать скалярной величиной.

## **2. 2. Адиабатические изменения состояния**

В предыдущем параграфе рассматривалось уравнение сохранения импульса с точки зрения дрейфовой и гидродинамической теорий. В настоящем параграфе мы установим соответствующую связь между этими двумя теориями на примере закона сохранения энергии. Начнем с закона (2.1) электромагнитной индукции. Ограничиваясь членами низшего порядка в уравнениях

(5.20) и (5.52) и используя условия, перечисленные при выводе формулы (5.55), получаем

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} - \frac{m}{q} \vec{\nabla} \varphi_g = -\vec{v} \times \vec{B}. \quad (5.56)$$

Воспользуемся теперь законом индукции (2.1). Тогда

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) = -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \vec{B} \text{div} \vec{v}. \quad (5.57)$$

Предположим, что выражение для тензора давления определяется формулой (5.21), и подставим  $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$  из выражения (5.57) в уравнения (5.34) и (5.35). Находя  $\text{div} \vec{v}$  при помощи уравнения (5.17), получаем

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \left( \frac{\rho_{\parallel} B^2}{n^3} \right) = 0 \quad (5.58)$$

и

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \left( \frac{\rho_{\perp}}{nB} \right) = 0. \quad (5.59)$$

Эти уравнения, выражающие закон сохранения энергии для продольного и поперечного теплового движения, впервые были выведены Чу, Гольдбергером и Лоу [90]. В изотропном случае, когда  $\rho_{\parallel} = \rho_{\perp} = \rho$ , эти уравнения нужно заменить одним уравнением, которое непосредственно следует из выражений (5.33) и (5.17):

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \left( \frac{\rho}{n^{5/3}} \right) = 0. \quad (5.60)$$

Это уравнение представляет собой хорошо известный адиабатический закон. В нулевом порядке по параметру  $\epsilon$  массовая скорость  $\vec{v}$  равна выражению (5.55) и совпадает со средней скоростью дрейфа ведущего центра  $u$ , вычисленной в том же приближении. В этом случае величины

$$\frac{\rho_{\perp}}{nB} = \frac{\frac{1}{2} m \overline{W^2}}{B} = \overline{M}, \quad \frac{\rho_{\parallel} B^2}{n^3} = \frac{\overline{m u_{\parallel}^2} B^2}{n^2} \equiv C_{\parallel}, \quad (5.61)$$

определенные согласно уравнениям (5.59) и (5.58), совпадают с адиабатическими инвариантами в системе

отсчета, которая движется со средней скоростью дрейфа частиц.

Первый из инвариантов  $\bar{M}$  — это среднее значение эквивалентного магнитного момента. Проводя несложные рассуждения, нетрудно убедиться, что второй адиабатический инвариант  $C_{\parallel}$  непосредственно связан с продольным адиабатическим инвариантом  $J$ , введенным в гл. 4. Предположим, что внутри силовой трубки с магнитным потоком  $\Phi$  и средним сечением  $S = \Phi/B$  находится постоянное число частиц со средней плотностью  $n$  (см. рис. 4.4). Пусть среднее расстояние между магнитными пробками, где происходит движение частиц, равно  $2s_m$ . Так как полное число частиц внутри силовой трубки не изменяется, то величина  $nSs_m = \Phi(n/B)s_m$  должна сохраняться. Комбинируя эту величину со вторым инвариантом из (5.61), можно показать, что величина  $\overline{u_{\parallel}^2 s_m^2}$  должна быть постоянной. Но как легко убедиться при помощи определения продольного адиабатического инварианта (4.8), эта величина совпадает с  $J^2$ .

Кроме того, из уравнения (5.56) следует, что поле скоростей в нулевом порядке по параметру  $\epsilon$  удовлетворяет условию сохранения потока (2.9). Рассмотрим аксиально симметричную конфигурацию, аналогичную изображенной на рис. 4.1, в. Предположим, что средняя массовая скорость  $\vec{v}$  возникает под действием аксиально симметричного поля сил  $\vec{F}$ . В нулевом порядке по параметру  $\epsilon$  скорость  $\vec{v}$  равна скорости ведущих центров  $\vec{u}$ . Рассмотрим далее контур  $C$ , который движется вдоль оси вместе с полем скоростей  $\vec{v}$ . Пусть он имеет форму коаксиального кольца, образованного частицами, которые в момент времени  $t_0$  были расположены на некотором расстоянии от оси. В более поздние моменты времени эта кривая пройдет через те же силовые линии, на которых расположены частицы, совпавшие в момент времени  $t_0$  с контуром кольца.

Отсюда следует, что при изменении магнитного поля во времени рассматриваемый контур будет охватывать постоянный поток  $\Phi$ . Это и означает, что в нулевом порядке по параметру  $\epsilon$  величина  $\Phi$  есть адиабатический инвариант в полном соответствии с определением раздела 1.5 гл. 4.

Полученные результаты, касающиеся сохранения потока и адиабатических инвариантов (5.61), имеют непосредственное отношение к явлениям магнитного сжатия, которые будут рассмотрены в гл. 6.

### 2. 3. Поток частиц, ведущих центров и распределение плотности

В предыдущих разделах выведены уравнения для дрейфового движения со скоростью  $\vec{u}$  и для макроскопического движения с массовой скоростью  $\vec{v}$ , причем дрейфовая скорость  $\vec{u}$  связана с потоком ведущих центров, а макроскопическая скорость  $\vec{v}$  — с потоком частиц. В этом параграфе мы исследуем физические причины, из-за которых эти потоки могут быть не равны друг другу. Для этого нам нужно изучить, как движутся поверхности постоянной плотности, т. е. каким образом происходит дрейф распределения плотности. Это особенно интересно для задач, в которых возникает разделение заряда, связанное с тем, что электроны и ионы движутся с различными скоростями.

Применяя оператор дивергенции к уравнению (5.52) и комбинируя получившийся результат с уравнением непрерывности (5.17), получаем [101]:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial n}{\partial t} = & \left( \vec{F} \times \frac{\vec{B}}{qB^2} - m \frac{d_v \vec{v}}{dt} \times \frac{\vec{B}}{qB^2} + \vec{v}_{\parallel} \right) \cdot \vec{\nabla} n + \\ & + \frac{2}{qB^3} (\vec{B} \times \vec{\nabla} B) \cdot \text{div } \vec{\pi} + n \text{div} \left( \vec{F} \times \frac{\vec{B}}{qB^2} - m \frac{d_v \vec{v}}{dt} \times \right. \\ & \left. \times \frac{\vec{B}}{qB^2} \right) + \frac{1}{qB^3} \text{div} (\vec{B} \times \text{div } \vec{\pi}) + nB (\hat{v}_{\parallel} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{v_{\parallel}}{B} \right), \end{aligned} \quad (5.62)$$

где введена полная производная по времени, связанная с массовым движением,  $d_v/dt \equiv \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ , а выражение для  $\text{div } \vec{v}_{\parallel}$  записано с учетом равенства  $\text{div } \vec{B} = 0$ . Прежде всего исследуем уравнение (5.62) в нулевом порядке по параметру  $\epsilon$ , пренебрегая давлением и инерционными

членами, а также предполагая выполненными условия, необходимые для справедливости выражения (5.55):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + (\vec{v}_{\parallel} + \vec{u}_F) \cdot \vec{\nabla} n + n \operatorname{div} \vec{u}_F + \\ + nB (\widehat{\vec{v}_{\parallel}} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{v_{\parallel}}{B} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Дрейф под действием внешних сил происходит со скоростью  $\vec{u}_F$ , определенной уравнением (3.23). В частности, если отношение  $v_{\parallel}/B$  постоянно, то движение плазмы вдоль магнитных силовых линий происходит без изменения плотности. Предположим теперь, что поле внешних сил  $\vec{F}$  имеет скалярный потенциал, а магнитное поле в плазме незначительно отличается от вакуумного магнитного поля, которое изменяется в пространстве значительно медленнее по сравнению с распределением плотности. Это означает, что  $\operatorname{div} \vec{u}_F = 0$ . Тогда из уравнения (5.63) следует, что в нулевом порядке по параметру  $\epsilon$  распределение плотности  $n$  перемещается в пространстве, не изменяя своего профиля, со скоростью ведущих центров  $\vec{v}_{\parallel} + \vec{u}_F$ , причем эта скорость совпадает в нулевом приближении с гидродинамической. Этот же результат можно получить из уравнения (3.43), взяв от него дивергенцию.

Теперь учтем эффекты первого порядка и предположим, что выражение для тензора давления задается при помощи соотношений (5.21) и (5.24). Используя уравнение (3.21), получаем

$$\begin{aligned} (\vec{B} \times \vec{\nabla} B) \cdot \operatorname{div} \vec{\pi} = (\vec{B} \times \vec{\nabla} B) \cdot \vec{\nabla}_{\perp} p_{\perp} - \\ - (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\vec{B} \times \vec{\nabla} B) \cdot \frac{\vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B}}{B^2}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Далее

$$\begin{aligned} \vec{B} \times \operatorname{div} \vec{\pi} = \vec{B} \times \vec{\nabla}_{\perp} p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \vec{B} \times \\ \times [(\widehat{\vec{B} \cdot \vec{\nabla}}) \widehat{\vec{B}}]. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Определим скорость

$$\begin{aligned} \vec{U}_n = & \vec{v}_{\parallel} + \vec{u}_F + (K_{\perp} + 2K_{\parallel}) \vec{B} \times \frac{\vec{\nabla} B}{qB^3} + \\ & + 2K_{\parallel} \frac{(\text{rot } \vec{B})_{\perp}}{qB^2} - m \frac{d}{dt} (\vec{v}_{\parallel} + \vec{u}_F) \times \frac{\vec{B}}{qB^2}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

При этом уравнение (5.62) с точностью до членов первого порядка по параметру  $\varepsilon$  будет равно

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \vec{U}_n \cdot \vec{\nabla} n + n \text{div} \left[ \vec{u}_F + \frac{m}{qB^2} \times \frac{d}{dt} (\vec{v}_{\parallel} + \vec{u}_F) \right] + \\ + \frac{n}{qB^2} [\widehat{2\vec{B}} \times \vec{\nabla} B + (\text{rot } \vec{B})_{\perp}] \cdot \vec{\nabla} K_{\perp} + \frac{n}{qB^2} \text{div} \{ (2K_{\parallel} - \\ - K_{\perp}) [\widehat{\vec{B}} \times \vec{\nabla} B + (\text{rot } \vec{B})_{\perp}] \} - \frac{2n}{qB^5} (2K_{\parallel} - K_{\perp}) (\vec{B} \times \vec{\nabla} B) \times \\ \times (\vec{B} \times \text{rot } \vec{B}) + nB (\vec{v}_{\parallel} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{v_{\parallel}}{B} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Здесь опять использовано уравнение (3.21), а также соотношения  $p_{\parallel} = 2nK_{\parallel}$  и  $p_{\perp} = nK_{\perp}$ .

В уравнении (5.67) мы учли все члены первого порядка по параметру  $\varepsilon$ , которые определяют движение поверхностей постоянной плотности. Рассмотрим прежде всего выражение для скорости  $\vec{U}_n$ , приводящей к конвективному переносу этих поверхностей. Если в уравнении (5.67) учитывать только два первых члена, то распределение плотности будет перемещаться в пространстве со скоростью  $\vec{U}_n$ , не изменяя своей формы. Заметим, что скорость  $\vec{U}_n$  содержит все дрейфы ведущего центра, рассмотренные в разделе 1.1 гл. 3, включая также и те дрейфы, которые связаны с градиентом магнитного поля.

Таким образом, поперечная часть скорости  $\vec{U}_n$  равна средней дрейфовой скорости  $\vec{u}_{\perp}$ , полученной из уравнения (3.22) с точностью до членов первого порядка и усредненной по пространству скоростей. Далее, из уравнения (3.24) видно, что скорость дрейфа, связанная с

Градиентом магнитного поля, зависит от скоростей частицы  $u_{\parallel}$  и  $W$ . Поэтому в отсутствие столкновений частицы, расположенные в различных частях пространства скоростей, будут дрейфовать с различными скоростями. Это означает, что распределение частиц по скоростям изменяется в пространстве и во времени из-за неоднородности магнитного поля. Теперь учтем наличие столкновений в реальной плазме и предположим, что они приводят к установлению локального термодинамического равновесия. Тогда полное распределение частиц будет перемещаться в пространстве с дрейфовой скоростью, усредненной при помощи равновесной функции распределения частиц по скоростям.

Этот результат следует из выражений для третьего и четвертого членов в формуле (5.66) для скорости  $\vec{U}_n$ .

Четвертый и пятый члены в уравнении (5.67) содержат градиенты средних тепловых энергий  $K_{\parallel}$  и  $K_{\perp}$  и искажают распределение плотности, которое возникает в системе координат, движущейся со скоростью конвективного переноса  $\vec{U}_n$ . Это легко понять исходя из дрейфовой теории, так как пространственная неоднородность величин  $K_{\parallel}$  и  $K_{\perp}$  вызывает соответствующую неоднородность дрейфовой скорости (3.24), пропорциональной градиенту магнитного поля. Особый интерес представляют эффекты, описываемые третьим членом в уравнении (5.67). Они приводят к тому, что скорость движения поверхностей постоянной плотности отличается как от средней скорости ведущих центров, так и от средней массовой скорости. Причина состоит в том, что при движении может происходить сжатие и разрежение плазмы. В гл. 6 будут подробно рассмотрены эффекты сжатия, связанные с отличием  $\text{div} \vec{u}_F$  от нуля. Эти эффекты появляются в том случае, когда под действием силового поля  $\vec{F}$  частицы попадают в области, где меняется величина магнитного поля. В третий член уравнения (5.67) вносят свой вклад также силы инерции, которые приводят к дополнительной неоднородности распределения частиц, а следовательно, и к дополнительному сжатию или разрежению. Если продольная скорость  $v_{\parallel}$  мала,  $\vec{F} = q\vec{E}$ , и  $du_E/dt$  можно линеаризо-

вать, то нетрудно убедиться, что вклад, связанный с силами инерции, пропорционален величине  $(nm/B^2) \frac{\partial(\operatorname{div} \vec{E})}{\partial t}$ .

Взяв дивергенцию от выражения (2.2), легко показать, что этот член можно интерпретировать как скорость изменения электрического заряда в среде с эквивалентной диэлектрической проницаемостью, найденной по формуле (3.51). Таким образом, под действием сил инерции, которые по-разному действуют на электроны и ионы, в плазме возникает электрическая поляризация.

Как было показано, поверхности постоянной плотности движутся со скоростью, которая отличается как от скорости ведущего центра  $\vec{u}$ , так и от массовой скорости  $\vec{v}$ . Кроме того, из уравнений (3.22), (3.43), (3.47), (5.53) и (5.67) следует, что вообще имеется разница между скоростями  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$ . Проанализируем теперь более тщательно это различие.

Средний поток  $n\vec{u}_\perp$  ведущих центров в формуле (3.22) отличается от среднего потока  $n\vec{v}_\perp$  частиц в формуле (5.53) тем, что первый содержит скорость дрейфа, пропорциональную градиенту магнитного поля, а в последнем имеется член, пропорциональный градиенту давления. Это различие можно объяснить тем, что не у всех частиц, находящихся в данном элементарном объеме, соответствующие ведущие центры находятся в том же объеме, и наоборот. Чтобы перейти от потока ведущих центров к потоку частиц, необходимо вычесть поток тех ведущих центров, у которых соответствующие им частицы расположены вне данного объема, и добавить поток тех частиц, которые находятся внутри его, а соответствующие им ведущие центры расположены вне этого объема [12, 13]. Подобные вычисления приводят к тем же результатам, что и уравнения (3.47), (3.49) и (5.53). Причины, по которым градиент давления вызывает появление потока массы, легко понять из рис. 5.1, а. Здесь предполагается, что тепловая энергия  $K_\perp$  и магнитное поле однородны и постоянны, а градиент плотности направлен вдоль оси  $x$  и имеет положительный знак. В этом случае дрейфовая скорость ведущих центров равна нулю. Из рисунка видно, что через поверх-



ность  $S$ , перпендикулярную оси  $y$ , снизу вверх проходит значительно больше частиц, чем сверху вниз. Таким об-

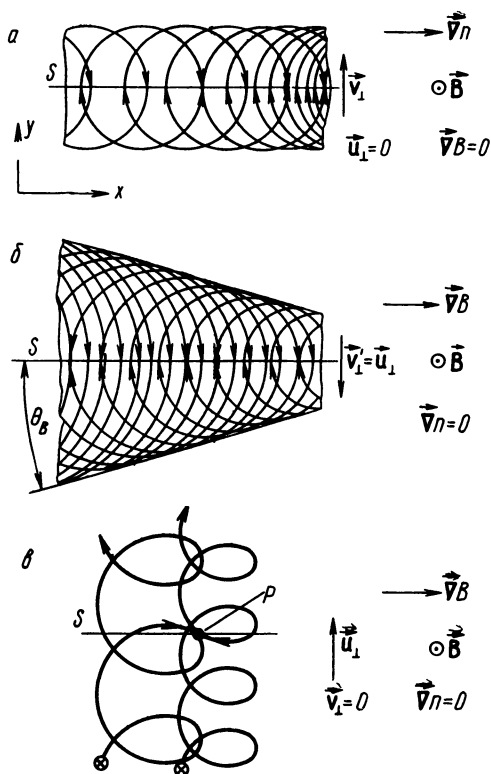


Рис. 5.1. Связь между потоком ведущих центров и потоком частиц через поверхность  $S$ , параллельную направлению магнитного поля. Тепловая энергия частиц считается постоянной:

$a$  — градиент плотности в присутствии однородного магнитного поля;  $б$  — частицы с постоянной плотностью в неоднородном магнитном поле. Траектории частиц рассматриваются в системе координат, движущейся со скоростью ведущего центра частицы  $\vec{u}_1$ ;  $в$  — то же, что в случае  $б$ , но частицы рассматриваются в лабораторной системе координат.

разом, градиент давления приводит к появлению массовой скорости  $\vec{v}$ , которая перпендикулярна магнитному полю  $\vec{B}$  и градиенту плотности  $\vec{\nabla}n$ .

На рис. 5.1, б и в предполагается, что плотность  $n$  и тепловая энергия  $K_{\perp}$  постоянны, в то время как магнитное поле имеет постоянный градиент  $\vec{\nabla} B$ , направленный вдоль оси  $x$ . Градиент магнитного поля вызывает появление дрейфовой скорости  $\vec{u}_{\perp} = -K_{\perp} \vec{\nabla} B \times B / qB^3$ , направленной вдоль оси  $y$ . Из рис. 5.1, б видно, что если перейти в систему отсчета, движущуюся с этой скоростью, то в этой системе частицы будут вращаться вокруг своих ведущих центров, распределение которых однородно в пространстве и не зависит от времени. В определенной нами системе отсчета возникает отличный от нуля полный поток частиц  $n\vec{v}'_{\perp}$ , проходящий через поверхность  $S$  сверху вниз.

Используя выражение (2.81) для радиуса вращения, а также выражение (3.24) для дрейфовой скорости, пропорциональной градиенту магнитного поля, после несложных геометрических рассуждений найдем, что  $n\vec{v}'_{\perp} = -n\vec{u}_{\perp}$ . Все эти рассуждения основаны на том, что величина напряженности магнитного поля  $B$  обратно пропорциональна длине дуги, которая соответствует углу  $\theta_B$  на рис. 5.1, б, а полный поток частиц в произвольном направлении равен одной четвертой величины средней тепловой скорости. Таким образом, если перейти в лабораторную систему отсчета, то величина массовой скорости  $\vec{v}_{\perp}$  равна нулю. В этом легко убедиться также из рис. 5.1, в, где считается, что распределение частиц в фазовом пространстве изотропно. В этом случае вероятность найти в произвольной точке  $P$  частицы, у которых абсолютные величины скоростей равны, а направления скоростей противоположны, совпадают друг с другом. Очевидно, это справедливо для всех абсолютных величин и направлений скоростей. Поток частиц не зависит, конечно, от того, будут траектории частиц искривляться магнитным полем или нет.

Приведенные на рис. 5.1, б траектории частиц можно также использовать для иллюстрации поведения газа с постоянной плотностью, поперечная «тепловая» скорость которого имеет постоянный градиент  $\vec{\nabla} W \sim \vec{\nabla} (T_{\perp})^{1/2}$ . Если такой газ поместить в однородное магнитное поле,

то поперечная массовая скорость  $\vec{v}_\perp$  однозначно определится градиентом температуры.

Рассмотрим другой предельный случай, когда магнитное поле имеет постоянную величину  $B$  и искривлено, как это показано на рис. 5.2. Согласно уравнениям (3.20) и (3.22), это приводит к появлению среднего дрейфа, перпендикулярного плоскости рисунка и равного по величине

$$u_\perp = \frac{2K_\parallel}{eBR}, \quad (5.68)$$

где  $R$  — локальный радиус кривизны магнитного поля. Средняя величина потока ведущих центров через заштрихованную поверхность равна при этом

$$\Psi_u \approx 2n\theta(R_2 - R_1)Ru_\perp = 4n\theta(R_2 - R_1)\frac{K_\parallel}{eB}, \quad (5.69)$$

где  $(R_2 - R_1)/R \ll 1$ . Этот поток направлен в плоскости рисунка. Определим связанную с вращением  $W$  разность потоков ведущих центров через границы  $R=R_1$  и  $R=R_2$  заштрихованной области на рис. 5.2:

$$\Psi_w = -n\theta(R_2 - R_1)aW = -2n\theta(R_2 - R_1)\frac{K_\perp}{eB}, \quad (5.70)$$

где  $a$  — радиус вращения. В изотропном случае, когда существует тепловое равновесие  $K_\perp = 2K_\parallel$ , мы получим  $\Psi_w = -\Psi_u$ . Таким образом, полный поток частиц через границы заштрихованной области равен нулю. Этому и следовало ожидать исходя из вида второго члена в правой части уравнения (5.53). Однако при наличии анизотропии функции распределения в соответствии с тем же уравнением полный поток частиц отличается от нуля.

В случае теплового равновесия из уравнений (5.20), (5.53) и (3.49) следует, что наличие градиента абсолютной величины магнитного поля не приводит к появлению массовой скорости. Как показали Каулинг [102] и Спитцер [13], это находится в полном соответствии с теоремой

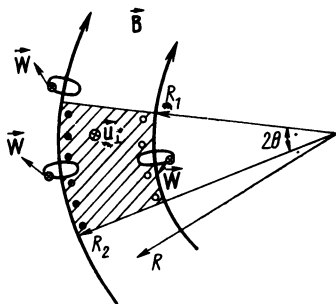


Рис. 5.2. Движение заряженных частиц в магнитном поле с радиусом кривизны  $R$ .

Лиувилля (5.2). Рассмотрим газ, состоящий из ионов и электронов с равными и однородными плотностями и с однородными и изотропными распределениями по скоростям  $\vec{\omega}$ . Поместим частицы в некоторую область, ограниченную зеркально отражающими стенками. Предположим далее, что начальная плотность частиц в фазовом пространстве внутри указанного объема однородна, а электрический пространственный заряд в начальном состоянии равен нулю. Пренебрежем столкновениями между частицами и будем считать, что магнитное поле стационарно. Рассмотрим прежде всего частицы, равномерно распределенные в области фазового пространства, где абсолютная величина скорости заключена в узком интервале между  $\omega$  и  $\omega + \Delta\omega$ . В соответствии с теоремой Лиувилля плотность этих частиц в фазовом пространстве остается постоянной вдоль произвольной траектории. Единственная сила, которая действует на частицы внутри выделенного объема, это сила  $q\vec{\omega} \times \vec{B}$ , не изменяющая абсолютной величины скорости  $\vec{\omega}$ , а меняющая лишь ее направление. Этот результат остается справедливым и при наличии зеркально отражающих стенок. Так как начальная величина плотности не зависит от направления движения и однородна в пространстве, то, следовательно, плотность в фазовом пространстве остается постоянной для всех более поздних моментов времени. Очевидно, что частицы во всех других интервалах  $\Delta\omega$  пространства скоростей будут вести себя аналогично. Поэтому мы можем сделать вывод, что если в начальном состоянии макроскопическая скорость отсутствовала, то ее не будет и в последующие моменты времени, независимо от того, есть или нет дрейфа частиц, пропорционального градиенту магнитного поля. При этом поток частиц, отражающихся от стенок, точно компенсирует поток ведущих центров. Это согласуется с выводами, которые были сделаны ранее Бором [103] и Ван Леевеном [104].

Полученный результат нетрудно понять также исходя из второго закона термодинамики, который утверждает, что энтропия замкнутой системы не может уменьшаться. Поэтому если система находится в состоянии термодинамического равновесия, то она не может пе-

рейти в другое состояние, в котором массовая скорость отлична от нуля. При наличии столкновений в качестве начального состояния можно выбрать максвелловское распределение по скоростям. Если газ находится в термодинамическом равновесии со стенками, то из второго закона термодинамики следует, что начальное распределение не изменится и макроскопические скорости будут отсутствовать для всех более поздних моментов времени.

В заключение сделаем несколько замечаний, которые касаются членов второго порядка по параметру  $\epsilon$  в выражении для силы  $\vec{F}$ , определяемой формулой (3.40). Наличие этих членов приводит к тому, что скорость дрейфа  $\vec{u}_F$  под действием внешних сил будет отличаться от скорости дрейфа в нулевом приближении  $\vec{F}_C \times \vec{B} / qB^2$ , где  $\vec{F}_C$  — величина силы в точке ведущего центра. Прежде всего необходимо выяснить, приводит ли ларморовское движение частиц к изменению средней силы  $\vec{F}$ , которая действует на плазму. Гидродинамическое уравнение движения (5.20) не дает ответа на этот вопрос. В дальнейшем приведем простой пример, указывающий на то, что член  $1/4 a^2 \nabla_{\perp}^2 \vec{F}$  в формуле (3.40) точно сокращается с разностью сил, действующих на частицы, и некоторых дополнительных сил, которые действуют на ведущие центры.

На рис. 5.3 показан плоский слой плазмы, неограниченно простирающийся вдоль осей  $x$  и  $z$  и имеющий вдоль оси  $y$  толщину  $2a$ . Этот слой помещен в однородное магнитное поле, направленное вдоль оси  $z$ .

Предположим, что поле сил  $\vec{F}$  имеет одну компоненту и зависит только от координат  $y$ . Считая  $F = F_y$ , разложим  $F$  в ряд Тейлора по координате  $y$  вблизи начала отсчета  $y=0$

$$F = F_0 + \sum_{\nu} \frac{1}{\nu!} \left[ (y_c + a \cos \theta) \frac{d}{dy} \right]^{\nu} F_0, \quad (5.71)$$

где  $y_c$  — координата ведущего центра по оси  $y$ , а индекс 0 указывает, что величина  $F$  и все ее производные взяты в начале координат. Если вращением частицы

вокруг  $y_c$  можно пренебречь, то выражение для силы принимает следующий вид

$$F_c = F_0 + \sum_{\nu} \frac{1}{\nu!} \left( y_c \frac{d}{dy} \right)^{\nu} F_0. \quad (5.72)$$

Средняя величина этой силы в полосе шириной  $2a$  с точностью до членов второго порядка равна

$$\langle\langle F_c \rangle\rangle = F_0 + \frac{1}{6} a^2 \frac{d^2 F_0}{dy^2}. \quad (5.73)$$

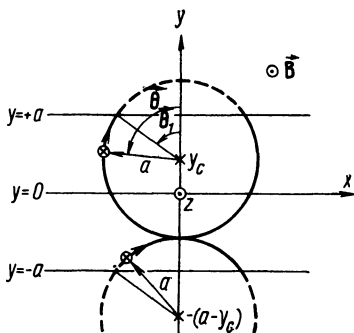


Рис. 5.3 Сила, действующая на заряженные частицы, отличается от нуля только в те промежутки времени, когда траектории частиц расположены внутри полосы  $-a < y < +a$ .

При учете вращения частиц следует помнить, что сила  $F$  действует на частицы только в течение того времени, когда они действительно находятся внутри рассматриваемой полосы. Отсюда следует, что при движении частицы по той части траектории, которая показана на рис. 5.3 пунктиром, взаимодействие этой частицы с частицами в области указанной полосы отсутствует. Среднюю величину  $F$  получают при этом интегрированием выражения (5.71) по периоду ларморовского вращения частицы

ну  $F$  получают при этом интегрированием выражения (5.71) по периоду ларморовского вращения частицы

$$\langle F \rangle_+ = \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[ F_0 + y_c \frac{dE_0}{dy} + \left( \frac{1}{2} y_c^2 + \frac{1}{4} a^2 \right) \frac{d^2 F_0}{dy^2} \right] \theta + \left[ \frac{dF_0}{dy} + y_c \frac{d^2 E_0}{dy^2} \right] a \sin \theta + \frac{1}{8} a^2 \frac{d^2 F_0}{dy^2} \sin 2\theta \right\}_{\theta_1}^{2\pi - \theta_1}, \quad (5.74)$$

при  $0 < y_c < 2a$ . При  $-2a < y_c < 0$  соответствующее выражение обозначается  $\langle F \rangle_-$  и имеет пределы  $-\theta_1$  и  $+\theta_1$ . Предположим, что плотность частиц постоянна. Тогда распределение ведущих центров вдоль оси  $y$  однородно, и можно вычислить средние значения величин  $\langle F \rangle_+$  и  $\langle F \rangle_-$ , интегрируя по  $y_c = \pm a - a \cos \theta_1$  соответственно в пределах от 0 до  $2a$  и от  $2a$  до 0. Таким

образом, средняя сила, действующая на все частицы внутри рассматриваемой полосы, равна

$$\langle\langle F \rangle\rangle = \frac{1}{2a} \int_0^{2a} \langle F \rangle_+ dy_c + \frac{1}{2a} \int_{-2a}^0 \langle F \rangle_- dy_c. \quad (5.75)$$

Подставляя в выражение (5.75) соотношение (5.74) и соответствующее выражение для  $\langle F \rangle_-$ , после несложных вычислений получаем с точностью до членов второго порядка  $\langle\langle F \rangle\rangle = \langle\langle F_c \rangle\rangle$ , как это и следует из макроскопической теории. Это вполне разумно, так как мгновенное среднее значение силы, действующей на частицы, не зависит от того, движутся эти частицы или нет. Настоящий вывод не противоречит результату гл. 8, где показано, что разделение заряда в некоторых случаях пропорционально величине ларморовского радиуса и  $\nabla_{\perp}^2 \vec{E}$ .

МАГНИТНОЕ СЖАТИЕ

Теория адиабатических инвариантов, развитая в гл. 4, имеет непосредственное отношение к большому числу явлений сжатия и разрежения, которые происходят при взаимодействии плазмы с магнитным полем. Рассмотрим возникающие при этом изменения плотности и энергии частиц.

§ 6. 1. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПЛОТНОСТЬЮ ЧАСТИЦ И ВЕЛИЧИНОЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Уравнения (3.16), (3.19)—(3.21) описывают движение ведущего центра. При усреднении уравнения движения ведущего центра по пространству скоростей получим

$$\overline{m\hat{u}}_{\parallel} \frac{du_{\parallel}}{dt} + m \frac{d\vec{u}_{\perp}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - m\vec{\nabla}\varphi_g - \left(\frac{K_{\perp}}{B}\right) \vec{\nabla}B - 2K_{\parallel} \frac{\vec{\nabla}_{\perp}B - \vec{B} \times \text{rot } \vec{B}}{B}. \quad (6.1)$$

В то же время усредненное массовое движение описывается уравнениями (5.20) и (5.24), которые можно записать в следующем виде:

$$m \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - m\vec{\nabla}\varphi_g - \frac{1}{n} \vec{\nabla}_{\parallel} \times \times (2nK_{\parallel}) - \frac{1}{n} \vec{\nabla}_{\perp} (nK_{\perp}) + (2K_{\parallel} - K_{\perp}) \frac{(\vec{\nabla}B - \vec{B} \times \text{rot } \vec{B})}{B}. \quad (6.2)$$

Здесь мы предположим, что тензор давления определяется двумя скалярными величинами  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$ . Теперь выясним, при каких условиях сохраняется поток



поля скоростей  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$  согласно определению гл. 2. Взяв ротор от уравнения (6.1), получим

$$\operatorname{rot}(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \frac{1}{q} \operatorname{rot} \left[ \left( \frac{K_{\perp}}{B} \right) \vec{\nabla} B + 2K_{\parallel} \frac{(\vec{\nabla}_{\perp} B - \hat{B} \times \operatorname{rot} \vec{B})}{B} + \overline{m \vec{u}_{\parallel} \frac{du_{\parallel}}{dt}} + m \overline{\frac{d\vec{u}_{\perp}}{dt}} \right]. \quad (6.3)$$

Аналогично, применяя операцию  $\operatorname{rot}$  к уравнению (6.2), имеем

$$\operatorname{rot}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \frac{1}{q} \operatorname{rot} \left[ \frac{1}{n} \vec{\nabla}_{\parallel} (2nK_{\parallel}) + \frac{1}{n} \vec{\nabla}_{\perp} (nK_{\perp}) + (2K_{\parallel} - K_{\perp}) \frac{(\vec{\nabla} B - \hat{B} \times \operatorname{rot} \vec{B})}{B} + m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + m (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right]. \quad (6.4)$$

Вообще ни поле дрейфовой скорости ведущего центра, ни поле гидродинамической скорости жидкости, очевидно, ни удовлетворяют условиям сохранения потока (2.29) и линии (2.34). Эти условия могут быть выполнены только в наинищем порядке по параметру  $\epsilon$ , т. е. когда правыми частями уравнений (6.3) и (6.4) можно пренебречь.

Взяв ротор от уравнения (3.16), в котором мы положим  $\vec{F} = q\vec{E} - m\vec{\nabla} \varphi_g$ , получим аналогичное уравнение для дрейфовой скорости  $\vec{u}$  отдельной частицы. В общем случае скорость  $\vec{u}$  не удовлетворяет условию сохранения потока. Однако в наинищем порядке по параметру  $\epsilon$  это условие выполняется, если пренебречь инерционным дрейфом и учесть, что  $\operatorname{rot}(M \vec{\nabla} B) = 0$ .

Следовательно, в общем случае имеется некоторое «проскальзывание» частиц относительно магнитных силовых линий. Магнитное поле оказывается «вмороженным» в плазму только в низшем приближении по пара-

метру  $\varepsilon$ . Ограничимся изучением наименьшего приближения по параметру  $\varepsilon$ , когда  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$  приблизительно равны и выполнены условия, приводящие к уравнению (5.55).

Подставляя  $\text{div } \vec{v}$  из уравнения непрерывности (5.17) в выражение (5.75), получаем [105]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{\vec{B}}{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) n \quad (6.5)$$

или

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \left(\frac{\vec{B}}{n}\right) = \left[\left(\frac{\vec{B}}{n}\right) \cdot \vec{\nabla}\right] \vec{v}. \quad (6.6)$$

Введем смещение элемента жидкости  $\vec{\xi}$

$$\vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{\xi}. \quad (6.7)$$

Тогда уравнение (6.6) после некоторых преобразований можно переписать в виде [37]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \left\{ \frac{\vec{B}}{n} - \left[\left(\frac{\vec{B}}{n}\right) \cdot \vec{\nabla}\right] \vec{\xi} \right\} = 0. \quad (6.8)$$

Этот результат можно получить также из уравнения (2.30), которое описывает изменение элемента длины  $dl$ , переносимого полем скоростей  $\vec{V}_f$ . Из уравнений (6.3) и (6.4) следует, что в нулевом порядке по параметру  $\varepsilon$ , когда применима формула (5.55), поля скоростей  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$  сохраняют поток и силовую линию. Поэтому

$$d\vec{l} = \widehat{\vec{B}} dl, \quad d\vec{l}_0 = \widehat{\vec{B}}_0 dl_0, \quad \vec{V}_f = \vec{v} \approx \vec{u}. \quad (6.9)$$

На рис. 2.3 положительное направление элемента длины  $d\vec{l}$  совпадает с направлением магнитного поля  $\vec{B}$ . Рассмотрим теперь элемент объема длиной  $dl_0$  и поперечным сечением  $dS_0 = d\Phi_0/B_0$ , магнитный поток через которое равен  $d\Phi_0$  (рис. 6.1). Пусть в этом элементе объема содержится некоторое число частиц. При движении частицы остаются внутри некоторого элемента объема, через который по-прежнему проходит тот же магнитный поток. За время  $dt$  частицы пройдут расстояние  $\vec{v} dt$  и образуют новый элементарный объем с длиной

$dl$  и поперечным сечением  $dS = d\Phi_0/B$ . Так как число частиц сохраняется, то

$$n \frac{dl}{B} = n_0 \frac{dl_0}{B} = \text{const.} \quad (6.10)$$

Комбинируя уравнения (2.30), (6.9) и (6.10), в результате получаем

$$\frac{\vec{B}}{n} = \frac{\vec{B}_0}{n_0} + \left[ \left( \frac{\vec{B}_0}{n_0} \right) \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{v} dt. \quad (6.11)$$

Как следует из уравнения (6.7), смещение  $\vec{\xi}(\rho, t)$  определено таким образом, что вектор  $\vec{\rho} - \vec{\xi}$  в момент времени  $t=0$  описывает положение той частицы, которая в момент времени  $t$  находится в точке  $\vec{\rho}$ . Если выбрать теперь смещение равным нулю ( $\vec{\xi} = 0$ ), когда элементарный объем находится в точке  $\vec{\rho}$ , то  $\vec{\xi}(t=0) = \vec{\xi}_0 = -\vec{v} dt$ , причем вектор  $\vec{v} dt$  будет иметь направление, показанное на рис. 6.1. Отсюда легко видеть, что уравнение (6.11) эквивалентно выражению, которое получается в результате интегрирования уравнения (6.8) [37].

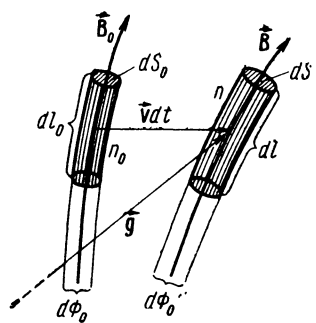


Рис 6.1. Перемещение элемента объема плазмы из положения с плотностью частиц  $n_0$  и радиусом-вектором  $\vec{\rho} - \vec{v} dt$  в положение с плотностью частиц  $n$  и радиусом-вектором  $\vec{\rho}$ .

Таким образом, мы имеем для всех движений, при которых выполняются условия сохранения потока и силовой линии, магнитное поле и плотность частиц связаны соотношениями (6.8), (6.10) и (6.11). Этот результат можно также получить при помощи следующих рассуждений. В нулевом порядке по параметру  $\epsilon$  уравнение (5.67) сводится к уравнению (5.63) при условии, что выполнены предположения о тензоре давления, сделанные в связи с выражением (5.55). Отметим, что  $1/q \text{rot } \vec{F} = -\partial \vec{B} / \partial t$  согласно урав-

нениям (2.37) и (2.1). После некоторых векторных преобразований уравнения (5.33) получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{n}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{1}{a} \vec{F} \cdot \left[ \left( \frac{n}{B^2} \right) \text{rot} \vec{B} - \vec{B} \times \vec{\nabla} \left( \frac{n}{B^2} \right) \right] + \\ + \vec{v}_{\parallel} \cdot \vec{\nabla} n + nB \widehat{\vec{v}}_{\parallel} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{v_{\parallel}}{B} \right) = 0, \quad (6.12)$$

где использовано выражение (3.23) для скорости  $\vec{u}_F$ . Члены, включающие  $\vec{v}_{\parallel}$ , приводят к эффектам продольной конвекции и продольного сжатия. Если течение несжимаемо вдоль магнитного поля  $\vec{B}$  или  $\vec{\nabla} n$  не имеет компоненты вдоль  $\vec{B}$ , то эти члены равны нулю. Ограничимся в дальнейшем рассмотрением случая  $\vec{v}_{\parallel} = 0$  и изучим следующие типы движений в стационарном магнитном поле.

1. Предположим, что в области, где происходит движение частиц, электрическими токами можно пренебречь. Тогда  $\text{rot} \vec{B} = 0$  и уравнение (6.12) равно

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_F \cdot \vec{\nabla} \right) \left( \frac{n}{B^2} \right) = 0, \quad \vec{v}_{\parallel} = 0. \quad (6.13)$$

Это означает, что при движении со скоростью  $\vec{u}_F$ , перпендикулярной магнитному полю  $\vec{B}$ , величина  $n/B^2$  остается постоянной. Таким образом, плотность  $n$  пропорциональна квадрату величины магнитного поля  $B$ . Это можно объяснить тем, что при движении частицы из области сильного поля  $\vec{B}_0$  в область более слабого поля  $\vec{B}$  как поперечное сечение  $dS$ , так и длина  $dl$  элементарного объема увеличиваются обратно пропорционально  $B$ , как показано на рис. 6.2, а.

В соответствии с уравнением (6.10) кривизна силовых линий магнитного поля приводит к тому, что элемент длины  $dl$  оказывается обратно пропорциональным величине магнитного поля  $B$ .

2. Если силовые линии магнитного поля прямые, то уравнение (6.12) сводится к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_F \cdot \vec{\nabla}\right) \left(\frac{n}{B}\right) = 0, \quad \vec{v}_{\parallel} = 0, \quad (6.14)$$

из которого следует, что теперь при движении сохраняется величина  $n/B$ . Это происходит потому, что в магнитном поле с прямыми силовыми линиями длина  $dl$  элементарного объема не меняется (см. рис. 6.2). Этот

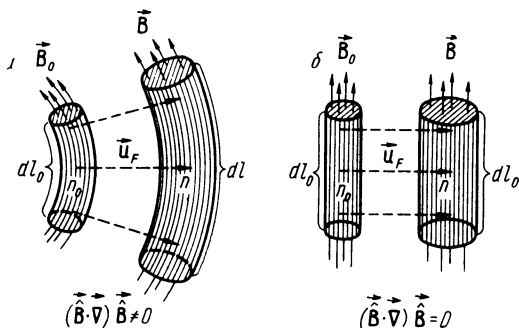


Рис. 6.2. Расширение ионизованной материи, движущейся поперек неоднородного магнитного поля. Продольное движение отсутствует ( $v_{\parallel} = 0$ ):

*a* — магнитное поле с искривленными силовыми линиями; *b* — магнитное поле с прямыми силовыми линиями.

результат согласуется также с уравнением (6.10). Отсюда следует, что в системе координат, движущейся со скоростью  $\vec{u}_F$ , число силовых линий, приходящихся на единицу поверхности поперечного сечения  $dS$  элементарного объема, изменяется пропорционально плотности частиц.

## § 6. 2. МЕХАНИЗМЫ СЖАТИЯ И НАГРЕВА

Большинство предложенных способов сжатия и нагрева плазмы основано на сохранении адиабатических инвариантов  $M$  и  $J$ , первый из которых относится к поперечному сжатию, а второй — к продольному. Такие

процессы сжатия (или разрежения) могут происходить в ионизованном газе, который удерживается магнитным полем, зависящим от времени. При этом силовые линии магнитного поля действуют аналогично поршню, который сжимает газ. Однако для того чтобы вызвать изменение плотности газа, совсем не обязательно изменение магнитного поля во времени. С примерами такого рода мы уже встречались в § 6.1, где плазма в результате дрейфового движения вытеснялась в области с переменной величиной магнитного поля (см. также рис. 6.2). В дальнейшем будут подробно исследованы некоторые механизмы сжатия.

## 2. 1. Сжатие плазмы в ловушке с магнитными пробками

Предположим, что частица удерживается магнитным полем ловушки между двумя точками отражения  $s=s_1$  и  $s=s_2$  на некоторой силовой линии, как это показано

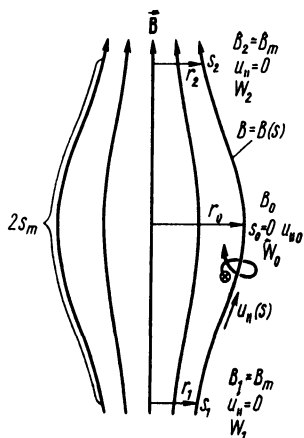


Рис. 6.3. Движение частицы вдоль магнитной силовой линии между двумя точками отражения  $s_1$  и  $s_2$ . Координата точки пересечения траектории частицы с плоскостью минимального магнитного поля  $B_0$  равна  $r_0$ .

на рис. 6.3. При этом, как и в гл. 4, предположим, что электростатическое и гравитационное поля отсутствуют. Величина магнитного поля  $B = B(s, t)$  есть функция продольной координаты  $s$ . Если магнитное поле  $\vec{B}$  меняется достаточно медленно по сравнению со временем обращения частицы по ларморовской орбите  $t_g$ , а также по сравнению со временем продольных колебаний  $t_{||}$  между точками отражения, то эквивалентный магнитный момент

$$M = \frac{mW^2}{2B(s, t)} \quad (6.15)$$

и продольный инвариант

$$J = m \oint u_{||} ds = 2m \int_{s_1}^{s_2} u_{||} ds \quad (6.16)$$

будут приближенными интегралами движения. Теперь рассмотрим явления сжатия в магнитном поле  $\vec{B}$ , основываясь главным образом на результатах, которые были получены Постом [106].

Прежде всего обсудим нагрев частиц, связанный с приближенным сохранением магнитного момента  $M$ . Так как характерное время  $A / \left| \frac{\partial A}{\partial t} \right|$  изменения магнитного поля велико по сравнению с временами  $t_g$  и  $t_{\parallel}$ , то члены в правой части уравнения (2.38) достаточно малы. Ввиду этого выражение для полной скорости

$$w^2 \approx u_{\parallel}^2 + W^2 \approx W_m^2. \quad (6.17)$$

Эта величина оказывается приблизительно постоянной в течение времени  $t_{\parallel}$ , но существенно изменится за время, сравнимое с временем изменения магнитного поля. В уравнении (6.17)  $u_{\perp} \ll W$ , а величина  $W_m$  равна скорости вращения частицы по ларморовской орбите в точках поворота  $s_1$  и  $s_2$ , где  $u_{\parallel} = 0$ .

Согласно уравнению (6.15), соответствующие значения магнитного поля в точках двух последовательных отражений  $B_1$  и  $B_2 = B_m$  равны. Они связаны со скоростью  $W$  следующим образом:

$$\frac{W^2}{B(s, t)} = \frac{W_0^2}{B_0(t)} = \frac{W_m^2}{B_m(t)} = \frac{2M}{m} = \text{const.} \quad (6.18)$$

Здесь индекс 0 относится к «экваториальной» плоскости ловушки, где величина магнитного поля  $\vec{B}$  имеет минимальное значение. Комбинируя уравнения (6.17) и (6.18), получаем

$$u_{\parallel}^2 = W_m^2 \left( 1 - \frac{B}{B_m} \right). \quad (6.19)$$

Так как  $u_{\parallel}^2$  — положительная величина, то частица не может достичь области, где поле превышает значение  $B = B_m$ . Формула (6.19) представляет собой хорошо известное соотношение, которое описывает движение частицы в ловушке с магнитными зеркалами. Введем пробное отношение

$$R(t) = \frac{B(t)}{B_0(t)}, \quad R_m = \frac{B_m}{B_0}. \quad (6.20)$$

Используя формулы (6.17), (6.18) и (6.20), получаем

$$\omega^2(t) = \omega^2(0) \cdot \frac{R_m(t)}{R_m(0)} \cdot \frac{B_0(t)}{B_0(0)}, \quad (6.21)$$

где увеличение энергии частицы выражается при помощи параметров продольного и поперечного сжатия.

Теперь исследуем некоторые особенности движения частицы по ларморовской орбите. Магнитный поток, который охватывает частица

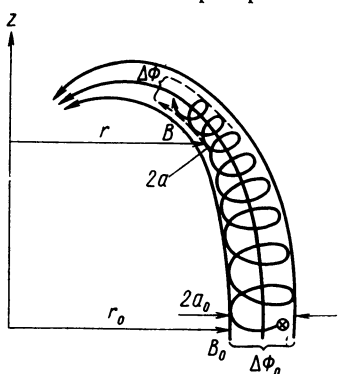


Рис. 6.4. Движение частицы в магнитном поле пробочной конфигурации, когда величина магнитного поля  $B$  увеличивается быстрее чем  $1/r^2$ . Из рисунка видно, что при движении вдоль силовых линий частица касается различных силовых линий.

при ларморовском вращении за один оборот, равен  $\pi a^2 B = 2(m/q^2)M$  и, как показано в разделе 1.2 гл. 4, является приближенным интегралом движения. В то же время при движении в магнитной ловушке частица касается двух силовых линий магнитного поля, которые пересекают «экваториальную» плоскость в точках  $r_0$  и  $r_0 + 2a$ . Магнитный поток через соответствующую кольцевую область в экваториальной плоскости равен  $\Delta\Phi_0 \approx 4\pi r_0 a_0 B_0$ , как это видно из рис. 6.4. Если частица двигалась вдоль магнитного поля  $\mathbf{B}$ , то в новом положении она будет касаться

других силовых линий, которые обозначены пунктирными линиями, причем соответствующий поток равен  $\Delta\Phi \approx 4\pi r a B$ . Отсюда следует, что  $\Delta\Phi/\Delta\Phi_0 = (r/r_0) \times (B/B_0)^{1/2}$ . Поэтому при вращении по ларморовской окружности частица будет касаться тех же силовых линий только в том случае, если  $B \sim 1/r^2$ . Этот результат справедлив для магнитного поля монополя, которое показано на рис. 2.6. В общем случае произвольной ловушки с магнитными пробками это неверно. В частности, это несправедливо для частицы, вращающейся по ларморовской окружности вокруг силовой линии, которая не проходит через ось симметрии.



Обратимся теперь к продольному адиабатическому инварианту. Из формул (6.16) — (6.18) и (6.20) получаем

$$J = 2m \int_{s_1}^{s_2} (W_m^2 - W^2)^{1/2} ds = (8mM)^{1/2} \int_{s_1}^{s_2} (B_m - B)^{1/2} ds = \\ = [8mMB_0(t)]^{1/2} \int_{R_m(1)}^{R_m(2)} [R_m(t) - R(s, t)]^{1/2} \frac{ds}{dR} dR, \quad (6.22)$$

где  $B$  незначительно меняется за время продольного периода  $t_{\parallel}$ . При помощи этого соотношения можно определить, как перемещаются в процессе сжатия точки отражения  $s_1$  и  $s_2$ . Соотношения (6.21) и (6.22) дают полную информацию об изменении плотности и энергии частиц. Проиллюстрируем это на следующих трех примерах:

1. Пусть в процессе сжатия форма магнитного поля не изменяется

$$R(s, t) = \frac{B(s, t)}{B_0(t)} = 1 + \left(\frac{s}{s_B}\right)^2, \quad (6.23)$$

где  $s_B$  — постоянная величина. Тогда преобразуем формулу (6.22)

$$J = \pi s_m^2(t) \cdot \frac{[2mMB_0(t)]^{1/2}}{s_B}, \quad (6.24)$$

где  $2s_m(t)$  — расстояние вдоль магнитного поля между точками отражения в момент времени  $t$ . Из условия сохранения  $J$  получаем выражение для коэффициента продольного сжатия

$$\kappa_{\parallel} = \frac{s_m(0)}{s_m(t)} = \left[ \frac{B_0(t)}{B_0(0)} \right]^{1/4}. \quad (6.25)$$

При этом изменение пробочного отношения определим из уравнения

$$\frac{[R_m(t) - 1]^2}{[R_m(0) - 1]^2} = \frac{B_0(0)}{B_0(t)}. \quad (6.26)$$

Если предположить, что пробочное отношение достаточно мало, то величину магнитного поля приближенно

можно считать пропорциональной  $1/r^2$  вдоль произвольной силовой линии. Это означает, что в течение всего процесса сжатия сохраняется поток в соответствии с § 6.1 этой главы. Введем соответствующий коэффициент сжатия в поперечном направлении

$$\kappa_{\perp} \approx \frac{B_0(t)}{B_0(0)}. \quad (6.27)$$

Тогда полный коэффициент сжатия равен

$$\kappa = \kappa_{\parallel} \cdot \kappa_{\perp} = \frac{n(t)}{n(0)} = \left[ \frac{B_0(t)}{B_0(0)} \right]^{3/4}. \quad (6.28)$$

Он определяет относительное увеличение плотности  $n(t)/n(0)$ . При этом прирост энергии найдем при помощи уравнений (6.21) и (6.26)

$$\frac{\omega^2(t)}{\omega^2(0)} = \frac{B_0(t)}{B_0(0)} \left\{ \left[ \frac{B_0(0)}{B_0(t)} \right]^{1/2} \left[ 1 - \frac{B_0(0)}{B_m(0)} \right] + \frac{B_0(0)}{B_m(0)} \right\}. \quad (6.29)$$

Из уравнения (6.25) видно, что расстояние  $2s_m$  между точками отражения уменьшается даже в том случае, если форма магнитного поля сохраняется в течение всего процесса сжатия. Это и понятно, так как в отсутствие столкновений продольные и поперечные движения не связаны друг с другом. Кроме того, при поперечном движении из-за большего числа измерений по сравнению с продольным движением происходит более сильное сжатие, а потому  $W^2$  увеличивается быстрее, чем  $\mu_{\parallel}^2$ . Это согласуется с полученным выше результатом  $\kappa_{\perp} > \kappa_{\parallel}$ . Так как отталкивающая сила, связанная при продольном движении с  $W^2$ , увеличивается быстрее, чем «давление частиц»  $\mu_{\parallel}^2$ , то точки отражения движутся навстречу друг другу.

2. Если в радиальном направлении магнитное поле постоянно, а меняется только расстояние между точками отражения частицы в магнитном поле, то возникает так называемое одномерное сжатие [76]. Упрощенная модель такого сжатия рассмотрена в разделе 1.3 гл. 4 (см. также рис. 4.4). При одномерном сжатии  $\kappa_{\perp}$  остается постоянным, а  $\kappa_{\parallel}$  увеличивается обратно пропорционально  $s_m(t)$ . Как следует из уравнения (4.21), увели-

чение энергии связано в этом случае только с увеличением продольной скорости, так как  $W(t) = W(0)$  и

$$\frac{\omega^2(t) - W^2(0)}{\omega^2(0) - W^2(t)} = \frac{u_{\parallel}^2(t)}{u_{\parallel}^2(0)} = \frac{s_m^2(0)}{s_m^2(t)}. \quad (6.30)$$

3. В принципе при помощи полученных уравнений можно рассмотреть процесс сжатия, при котором форма магнитного поля меняется произвольно. Однако вычисления становятся при этом довольно сложными. Ограничимся поэтому следующим простым случаем, когда  $R$  — такая функция  $g_B$ , что

$$R = \frac{B(s, t)}{B_0(t)} \equiv g_B = g_B \left[ \frac{s}{s_B(t)} \right], \quad (6.31)$$

а  $s_B(t)$  в процессе сжатия изменяется так, что  $R$  оказывается независимым от  $t$  для всех точек между  $s_1$  и  $s_2$ . Поведение функции  $g_B$  в этом случае определяется изменением масштаба продольной координаты магнитного поля.

Это происходит, когда пробки медленно движутся навстречу друг другу, а пробочные отношения остаются постоянными. Обозначая посредством  $g_B^{-1}$  функцию, обратную  $g_B(s/s_B)$ , получаем  $\frac{\partial s}{\partial R} = s_B \frac{d(g_B^{-1})}{dR}$ . Тогда формула (6.22) примет следующий вид

$$J = s_B(t) [8mMB_0(t)]^{1/2} \int_{R_m(1)}^{R_m(2)} [R_m - R(s)]^{1/2} \frac{d(g_B^{-1})}{dR} dR. \quad (6.32)$$

Но функция  $g_B^{-1}$  и квадратный корень в подынтегральном выражении будут функциями только от пробочного отношения  $R(s)$ , которое по предположению не зависит от времени для всех точек  $s$  внутри рассматриваемой конфигурации. Поэтому подынтегральное выражение не будет теперь явно зависеть от времени.

Особенно интересен случай, когда значение  $R_m$  остается постоянным для всех захваченных частиц плазмы. Тогда из условия сохранения  $J$  следует, что величина  $s_B^2 B_0$  постоянна для всех частиц. Так как площадь поперечного сечения магнитной трубки пропорциональ-

на  $1/B$ , то сжатие однородно по всем направлениям. Предположим теперь, что пробочное отношение настолько мало, что выполняется соотношение (6.27). Если  $R_m$  не зависит от времени, то энергия частицы, как следует из формул (6.21) и (6.27), увеличивается пропорционально коэффициенту поперечного сжатия

$$\frac{\omega^2(t)}{\omega^2(0)} = \frac{B_0(t)}{B_0(0)} \approx x_{\perp}. \quad (6.33)$$

При этом объем газа меняется пропорционально  $(x_{\parallel} \times x_{\perp})^{-1}$  или  $(x_{\perp})^{-2/3}$ , так как

$$x_{\parallel} = x_{\perp}^{1/2} = \left[ \frac{B_0(t)}{B_0(0)} \right]^{1/2}. \quad (6.34)$$

Следовательно, средняя энергия частицы изменяется обратно пропорционально объему в степени  $2/3$ . Как и следовало ожидать, это согласуется с адиабатическим законом (5.60) для изотропного сжатия газа с показателем адиабаты, равным  $3/2$ .

## 2.2. Альфвеновский механизм нагрева

В предыдущем параграфе было показано, что при изменении магнитного поля во времени может происходить «сжатие» плазмы в поперечном и продольном направлениях. В результате такого магнитного сжатия энергия частиц увеличивается. Альфвен [107] предложил другой метод нагрева, при котором сжатие плазмы достигается при помощи стационарного магнитного поля. Такой нагрев можно осуществить, заставив частицы двигаться в область увеличивающегося магнитного поля. Рассмотрим для простоты несколько искусственный случай неоднородного магнитного поля с прямыми силовыми линиями (рис. 6.2, в). При помощи уравнений дрейфовой теории (3.22) и (3.24) нетрудно убедиться, что скорость дрейфа, пропорциональная градиенту магнитного поля, не может привести к движению частиц в область более сильного магнитного поля, так как она направлена по касательной к поверхности  $B = \text{const}$ . Однако из тех же уравнений, а также из уравнения (6.14) следует, что движение частиц в область увеличивающегося магнитного поля оказывается возможным

при наличии поля сил  $\vec{F}$ , для которого соответствующая дрейфовая скорость  $\vec{u}_F$  имеет компоненту, перпендикулярную поверхности  $B = \text{const}$ . Для двумерного сжатия из уравнения (6.14) и условия сохранения магнитного момента  $M$  следует, что

$$\frac{n}{n_0} = \frac{B}{B_0} = \frac{W^2}{W_0^2}. \quad (6.35)$$

Это выражение относится к элементу плазмы, который в начальный момент времени находился в точке, где величина магнитного поля равна  $B_0$ , плотность плазмы  $n_0$ , а энергия вращения частицы  $K_{\perp 0} = \frac{1}{2} m \omega_0^2$ . Из формулы (6.35) нетрудно видеть, что  $K_{\perp}$  пропорционально  $n$ , как и следовало ожидать для адиабатического сжатия системы с двумя степенями свободы.

Для иллюстрации рассматриваемого механизма нагрева приведен следующий простой пример. На рис. 6.5 изображено движение частиц в скрещенных полях  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$ , компоненты которых в прямоугольных координатах равны

$$\vec{B} = \left( 0, 0, B_0 \left( 1 + \frac{x}{x_0} \right) \right), \quad \vec{E} = (0, E_0, 0). \quad (6.36)$$

Здесь  $B_0$ ,  $x_0$  и  $E_0$  — константы, причем  $x_0 \gg a$ . Полная дрейфовая скорость имеет постоянную компоненту  $\vec{u}_{\parallel}$  в продольном направлении. Поперечная компонента полной дрейфовой скорости в данном частном случае также оказывается постоянной и равна

$$\vec{u}_{\perp} = \left( \frac{E_0}{B_0}, \frac{M}{qx_0}, 0 \right). \quad (6.37)$$

Скорость электрического дрейфа  $E_0/B_0$  направлена по оси  $x$  вдоль  $\vec{\nabla} B$ , так что теперь частицы могут двигаться в область увеличивающегося магнитного поля, в результате чего происходит сжатие плазмы. Это можно представить следующим образом: градиент магнитного поля приводит к дрейфу частиц со скоростью  $M/qx_0$  по направлению оси  $y$  вдоль электрического поля  $E$ ; таким образом, частицы «падают» в электрическом поле  $E$  и

набирают энергию. Если рассмотреть движение плазмы в лабораторной системе, то окажется, что частицы получают энергию, дрейфуя перпендикулярно плоскостям постоянного электрического потенциала. Так как скорость  $\vec{u}_\perp$  постоянна, то в соответствии с уравнением

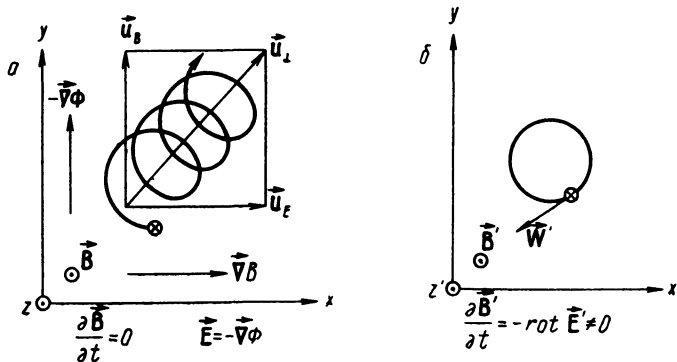


Рис. 6.5. Движение частицы в скрещенных электрическом

$\vec{E}$  и неоднородном магнитном  $\vec{B}$  полях:

$a$  — траектория частицы в лабораторной системе координат;  $b$  — траектория той же частицы в системе координат, движущейся со скоростью поперечного дрейфа частицы  $\vec{u}_\perp$ .

(2.38) среднее увеличение энергии за ларморовский период равно

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \omega^2 \right) \right\rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m W^2 \right) \right\rangle = \\ &= \langle q \vec{E} (\vec{u} + \vec{W}') \rangle = q \vec{E} \vec{u} = \frac{M E_0}{x_0}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Если же перейти к системе координат, которая движется со скоростью  $\vec{u}_\perp$ , то нетрудно видеть, что частица вращается по ларморовской орбите со скоростью  $\vec{W}'$  в меняющемся во времени магнитном поле  $\vec{B}'$ . Электрическое поле  $\vec{E}'$  в этой системе координат можно найти при помощи уравнения

$$\text{rot } \vec{E}' = - \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}. \quad (6.39)$$

Когда релятивистскими эффектами можно пренебречь, магнитное поле  $\vec{B}'$  выражается через магнитное поле  $\vec{B}$  в лабораторной системе координат и скорость  $\vec{u}_\perp$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} &= (\vec{u}_\perp \cdot \nabla) \vec{B} = \left[ 0, 0, u_x \frac{d}{dx} \left( B_0 \frac{x}{x_0} \right) \right] = \\ &= \left( 0, 0, -\frac{E_0}{x_0} \right). \end{aligned} \quad (6.40)$$

Легко видеть, что в движущейся системе координат среднее увеличение энергии частицы за ларморовский период  $t_g = 2\pi/\omega_g$  при магнитном сжатии будет равно

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mW^2 \right) \right\rangle &= \langle q \vec{E}' \cdot \vec{w}' \rangle = \frac{q}{t_g} \int_0^{t_g} \vec{E}' \cdot \vec{w}' dt = \\ &= -\frac{q}{t_g} \oint \vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\frac{q}{t_g} \iint (\text{rot } \vec{E}') \cdot \hat{n} dS = \\ &= \frac{q}{t_g} \iint \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} \cdot \hat{n} dS \approx \frac{ME_0}{x_0}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Интегрирование производится по ларморовской окружности с радиусом  $a$  и площадью кружка  $\pi a^2$ . Из формулы (6.41) следует, что  $\vec{w}' = -d\vec{l}/dt$  при  $q > 0$ , а нормаль  $\hat{n}$  определяется в соответствии с общепринятыми правилами.

Формула (6.41) согласуется с выражением (6.38), которое было получено из уравнений движения в лабораторной системе.

Отнесенная к единице объема работа сжатия, полученная с помощью выражения (6.41), должна совпадать с работой сил давления  $p_\perp = \frac{1}{2} nmW^2$  при изменении удельного объема  $1/n$

$$\frac{ME_0}{x_0} = -\frac{1}{2} nmW \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{n} \right). \quad (6.42)$$

Как и следовало ожидать, комбинируя уравнение (6.40) и выражение для магнитного момента  $M = mW^2/2B$ , можно показать, что величина  $n/B$  в процессе сжатия остается постоянной.

### 2.3. Гирорелаксационный эффект

Мы не учитывали влияние столкновений между частицами на механизмы сжатия. Теперь рассмотрим упрощенную модель, в которой кулоновские столкновения считаются мгновенными событиями, относящимися к определенной паре частиц. При этом предполагается, что в промежутках между столкновениями адиабатический инвариант все-таки сохраняется. Кулоновские столкновения приводят к появлению дополнительной связи между продольным и поперечным движением, в результате которой устанавливается изотропное распределение по скоростям.

Альфвен [107] предложил способ нагрева, при котором частицы должны последовательно проходить через области с различной величиной магнитного поля. В этом случае рассмотренный в предыдущем параграфе механизм нагрева, который был обратимым в отсутствие столкновений, будет теперь, благодаря столкновениям, увеличивать полную тепловую энергию частиц. Рассмотрим это явление несколько подробнее, причем при изложении будем следовать ранней работе Шлютера [108]. Пусть в начальный момент времени плазма находится в состоянии теплового равновесия с изотропным распределением по скоростям, так что  $p_{\parallel 0} = 2nK_{\parallel 0} = nmu_{\parallel 0}^2$  равно  $p_{\perp 0} = nK_{\perp 0} \frac{1}{2} = nmW_0^2$ . Рассмотрим далее меняющееся во времени магнитное поле, которое приводит к сжатию плазмы, нарушающему изотропию в пространстве скоростей. Столкновения между частицами плазмы будут восстанавливать изотропию, причем этот эффект тем сильнее, чем больше величина разности  $W^2 - 2u_{\parallel}^2$ . Предположим, что скорость изменения этой величины при ее стремлении к нулевому равновесному значению равна  $-\gamma_c(W^2 - 2u_{\parallel}^2)$ , где  $\gamma_c$  — положительная величина.

В промежутках между двумя последовательными столкновениями магнитный момент  $M = mW^2/2B$  остается



постоянным, так что в отсутствие столкновений величина  $W^2$  увеличивается со скоростью  $(W^2/B) \cdot (dB/dt)$ . Ограничимся магнитным полем с прямыми силовыми линиями, когда продольное сжатие отсутствует. В этом случае при изменении магнитного поля  $dB/dt$  возникает только поперечное сжатие, в результате которого энергия магнитного поля трансформируется в энергию поперечного движения частиц.

Предположим, что магнитное сжатие происходит при наличии столкновений между частицами. Исследуем совместное действие этих двух эффектов. Изменение полной энергии  $\frac{1}{2} m \omega^2 \approx \frac{1}{2} m (W^2 + u_{\parallel}^2)$  равно

$$\frac{d}{dt} (W^2 + u_{\parallel}^2) = \frac{W^2}{B} \cdot \frac{dB}{dt}, \quad (6.43)$$

так как магнитное поле — это единственный внешний источник энергии по отношению к частицам плазмы. Столкновения между частицами вызывают появление потока запасенной энергии в ларморовском вращении со скоростью  $W$  в продольное движение со скоростью  $u_{\parallel}$ . Таким образом, одновременно с увеличением скорости ларморовского движения  $W$  за счет энергии магнитного поля столкновения будут уменьшать величину  $W^2 - 2u_{\parallel}^2$

$$\frac{d}{dt} (W^2 - 2u_{\parallel}^2) = -\gamma_c (W^2 - 2u_{\parallel}^2) + \frac{W^2}{B} \cdot \frac{dB}{dt}. \quad (6.44)$$

Комбинируя уравнения (6.43) и (6.44), получаем

$$\frac{dW^2}{dt} = -\frac{1}{3} \gamma_c (W^2 - 2u_{\parallel}^2) + \frac{W^2}{B} \cdot \frac{dB}{dt}, \quad (6.45)$$

$$\frac{du_{\parallel}^2}{dt} = \frac{1}{3} \gamma_c (W^2 - 2u_{\parallel}^2). \quad (6.46)$$

Уравнение (6.46) не содержит  $dB/dt$ . Этого и следовало ожидать, так как все увеличение энергии продольного движения связано с диффузией в пространстве скоростей, которая происходит в результате столкновений.

Рассмотрим тождество

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{W^4 u_{\parallel}^2}{B^2} \right) = \frac{W^2}{B^2} \left( 2u_{\parallel}^2 \frac{dW^2}{dt} + W^2 \frac{du_{\parallel}^2}{dt} - 2 \frac{W^2 u_{\parallel}^2}{B} \frac{dB}{dt} \right). \quad (6.47)$$

Используя уравнения (6.45) и (6.46), получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{W^4 u_{\parallel}^2}{B^2} \right) = \gamma_c W^2 \frac{(W^2 - 2u_{\parallel}^2)^2}{3B^2} > 0, \quad (6.48)$$

так как  $\gamma_c$  — положительная величина.

Из этого результата следует, что если осциллирующее магнитное поле после одного периода возвращается к первоначальному значению, то величина  $W^4 u_{\parallel}^2$ , так же как и энергия, увеличивается в течение этого периода. Таким образом, существует механизм нагрева в осциллирующем магнитном поле. Рассмотренный способ нагрева во многом сходен с нагревом упругого твердого тела, которое обладает внутренним трением и подвергается пульсирующим деформациям. При этом имеет место явление гистерезиса, т. е. часть энергии, затраченной на создание колебаний, переходит в тепло. Результат, который следует из формулы (6.48), связан с аналогичными соображениями, и его можно получить из второго закона термодинамики.

### § 6.3. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Электродинамические силы, связанные с токами индукции в проводящей жидкости, часто могут играть роль возвращающей силы аналогично упругости струны. Поэтому нетрудно представить такой случай, когда взаимодействие этих сил с силами инерции жидкости приведет к появлению волн. Такие магнитогидродинамические волны открыл Альфвен [8]. В жидкости имеется еще одна возвращающая сила, пропорциональная градиенту давления, которая приводит к появлению обычных звуковых волн в отсутствие магнитного поля. При наличии магнитного поля существуют различные типы волн, в которых возвращающая сила определяется как электро-

динамическими, так и механическими эффектами. Эти волны впервые обсуждались в работах [109, 110], а подробное исследование их можно найти в работах [59, 111, 125].

Изучим плоскую магнитогидродинамическую волну, которая распространяется в однородной плазме, помещенной в однородное и постоянное внешнее магнитное поле  $\vec{B}_0$ . Невозмущенное состояние плазмы характеризуется постоянной плотностью  $n_0$  ионов и электронов, а также постоянными и равными тепловыми энергиями  $K_{i\parallel} = K_{e\parallel} = K_{\parallel}$  и  $K_{i\perp} = K_{e\perp} = K_{\perp}$  в продольном и поперечном направлениях. Поле действующих сил связано с электрическим полем  $\vec{E}$ , которое возникает в волне. При движении плазмы в волне возникает плотность электрического тока  $\vec{j}$  и магнитное поле  $\vec{B} = \vec{B} - \vec{B}_0$ , где  $\vec{B}$  — полное магнитное поле. Ограничимся рассмотрением волн малой амплитуды, в которых  $\vec{B} \ll B_0$ . Рассмотрим далее плоскую волну, волновой вектор  $\vec{k}$  которой имеет произвольное направление по отношению к направлению магнитного поля  $\vec{B}_0$ . При этом мы рассмотрим типы волн, которые связаны как с сжатием, так и с поперечными деформациями магнитного поля.

Из уравнений (5.20) и (2.2) следует

$$nm_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} \times \vec{B} - \text{div } \pi, \quad (6.49)$$

где мы пренебрегли инерцией электронов и током смещения,  $n_i \approx n_e \equiv n$ ,  $\vec{v}$  — скорость центра масс, а  $\pi$  — сумма тензоров ионного и электронного давлений. Возьмем производную по времени от уравнения (6.49) и в полученное выражение подставим соотношение (5.57):

$$nm_i \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0} [\text{rot rot } (\vec{v} \times \vec{B})] \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \pi). \quad (6.50)$$

Мы воспользовались законом Ома в наименьшем порядке по параметру  $\epsilon$  (5.56). Это приближение справедливо в данном случае, где основными являются эффекты магнитной индукции, а разделение заряда несущественно.

Выберем теперь такую координатную систему, в которой волновой вектор лежит в плоскости  $yz$ . В этом случае все величины пропорциональны  $\exp[i(k_y y + k_z z + \omega t)]$ . Предположим, что состояние плазмы изменяется адиабатически.

1. В изотропном случае вместо тензора давления в уравнение движения входит скалярное давление  $p = p_i + p_e$ . Невозмущенное значение давления  $p$  связано со скоростью звука  $U_s$  следующим соотношением  $U_s^2 = 5P/3nm_i$ . Из уравнений (5.60) и (5.17) следует

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{5}{3} P \operatorname{div} \vec{v}. \quad (6.51)$$

После подстановки этого равенства в уравнение движения (6.50) можно получить соответствующее дисперсионное соотношение, которое определяет три типа волн. Волны первого типа, связанные с величинами  $\vec{B}_x$  и  $v_x$ , имеют следующую фазовую скорость

$$U_p^2 = \frac{\omega^2}{k_y^2 + k_z^2} = V_A^2 \cos^2 \theta, \quad V_A^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 n m_i}, \quad (6.52)$$

где  $V_A$  — альфвеновская скорость, а  $\cos^2 \theta = k_z^2 / (k_y^2 + k_z^2)$ . Фазовые скорости волн второго и третьего типов, которые связаны с величинами  $\vec{B}_y, \vec{B}_z$  и  $v_y, v_z$ , равны [26]

$$U_p^2 = \frac{1}{2} (V_A^2 + U_s^2) \pm \frac{1}{2} [(V_A^2 + U_s^2)^2 - 4V_A^2 U_s^2 \cos^2 \theta]^{1/2}. \quad (6.53)$$

2. Для анизотропного изменения состояния воспользуемся результатами работы [113], а также адиабатическими уравнениями для продольного и поперечного давлений из разделов 1.3 и 2.2 гл. 5.

Введем две скорости звука  $U_{s\parallel}$  и  $U_{s\perp}$ , определяемые соотношениями  $U_{s\parallel}^2 = 3P_{\parallel}/nm_i$  и  $U_{s\perp}^2 = 2P_{\perp}/nm_i$ , где  $P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$  — невозмущенные значения продольного и поперечного давлений  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$ . Выражения для  $\partial p_{\parallel}/\partial t$  и  $\partial p_{\perp}/\partial t$ , полученные из уравнений (5.34) и (5.35), подставим в формулу (5.24) для тензора давления. Произ-

водные от магнитного поля  $\vec{B}$ , входящие в полученное выражение, выразим затем через  $\vec{v}$  при помощи уравнений (3.21) и (5.57). Окончательные формулы принимают следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \pi)_x = -(P_{\parallel} - P_{\perp}) k_z^2 v_x, \quad (6.54)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \pi)_y = P_{\perp} k_y (2k_y v_y + k_z v_z) - (P_{\parallel} - P_{\perp}) k_z^2 v_y, \quad (6.55)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \pi)_z = P_{\parallel} k_z (k_y v_y + 3k_z v_z) - (P_{\parallel} - P_{\perp}) k_y k_z v_y. \quad (6.56)$$

Подставляя полученный результат (6.54) — (6.56) в уравнение (6.50), получим волну, в которой колеблются величины  $\vec{B}_x$  и  $v_x$ . Эта волна распространяется со скоростью

$$U_p^2 = \left( V_A^2 - \frac{1}{3} U_{s\parallel}^2 + \frac{1}{2} U_{s\perp}^2 \right) \cos^2 \theta. \quad (6.57)$$

Найдем скорость распространения двух других волн, в которых меняются величины  $\vec{B}_y$ ,  $\vec{B}_z$  и  $v_y$ ,  $v_z$ ,

$$\begin{aligned} U_p^2 = & \frac{1}{2} \left[ V_A^2 + \frac{2}{3} U_{s\parallel}^2 \cos^2 \theta + U_{s\perp}^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) \right] \pm \\ & \pm \frac{1}{2} \left\{ \left[ V_A^2 - \frac{4}{3} U_{s\parallel}^2 \cos^2 \theta + U_{s\perp}^2 \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left( 1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) \right]^2 + U_{s\perp}^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right\}^{1/2}. \quad (6.58) \end{aligned}$$

При  $\theta = \pi/2$  в обоих рассмотренных случаях существует продольная волна. Она представляет собой волну сжатия, схематически изображенную на рис. 6.6, б, в которой одновременно действуют «упругая» сила, связанная с электромагнитным полем, и градиент давления. Однако если в изотропном случае (6.53) возвращающая сила определяется полным давлением  $P$ , то в анизотропном случае (6.58) соответствующий вклад в возвращающую силу определяется только поперечным давлением  $P_{\perp}$ .

При  $\theta = 0$  решение уравнения (6.52) и первое решение уравнения (6.53) определяют поперечную альфве-

новскую волну, в которой, как показано на рис. 6.6, *в*, возвращающая сила в волне связана только с электромагнитным полем. Вторые решения уравнений (6.53) и (6.58) дают чисто звуковые волны, которые различаются только тем, что в первом случае в волне происходит трехмерное сжатие, а во втором — одномерное сжатие. Далее решение уравнения (6.57) и первое решение урав-

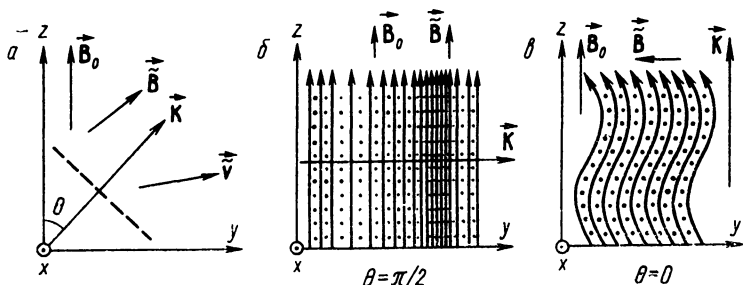


Рис. 6.6. Распространение плоской магнитогидродинамической волны с волновым вектором в однородном внешнем магнитном поле  $\vec{B}_0$ :

*a* — произвольное направление нормали к волновому фронту, *б* — продольная волна с  $\theta = \pi/2$ , *в* — поперечная волна с  $\theta = 0$

нения (6.58) совпадают и дают скорость распространения альфвеновской волны, которая несколько видоизменяется при анизотропном давлении. При выполнении условия

$$P_{\parallel} > \frac{B^2}{\mu_0} + P_{\perp} \quad (6.59)$$

альфвеновская волна оказывается неустойчивой [112]. Такая неустойчивость называется обычно «шланговой». Эта неустойчивость связана с наличием центробежной силы, которая действует на частицы, движущиеся с тепловой скоростью вдоль искривленных волной магнитных силовых линий.

Для произвольного угла  $\theta$  второе решение уравнения (6.58) становится отрицательным при

$$P_{\perp}^2 \sin^2 \theta > 3P_{\parallel} \left[ \frac{B^2}{\mu_0} - P_{\parallel} \cos^2 \theta + P_{\perp} (1 + \sin^2 \theta) \right]. \quad (6.60)$$

В этом случае развивается пробочная неустойчивость, которая подробно исследована в работах [114, 115]. Возникновение этой неустойчивости связано с увеличением концентрации плазмы в области слабого магнитного поля, что приводит к расширению поперечного магнитного поля. В результате этого увеличивается пробочное отношение и концентрация плазмы в рассматриваемой области еще больше возрастает.

В заключение отметим, что для волн, фазовая скорость распространения которых определяется формулами (6.52) и (6.57), групповая скорость  $\vec{U}_g = \partial\omega/\partial\vec{k}$  имеет лишь компоненту, направленную вдоль магнитного поля. Для волн, фазовые скорости распространения которых определяются формулами (6.53) и (6.58), групповая скорость имеет и другие компоненты, отличные от нуля.

# УДЕРЖАНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В предыдущих главах было показано, что плазма не может свободно двигаться поперек сильного магнитного поля, так как магнитные силовые линии «вморожены» в нее. Основные черты поведения плазмы в магнитном поле определяются по существу этим явлением.

Эта глава посвящена изучению удержания заряженных частиц в различных конфигурациях магнитного поля. Рассматриваемые вопросы прежде всего связаны с астрофизическими приложениями, среди которых следует упомянуть изучение областей магнитного поля, недоступных для космических лучей, а также исследование различных механизмов, существенных для поясов Ван Аллена. Другое важное применение этой теории связано с разработкой и конструированием «магнитных ловушек» для удержания плотной плазмы и нагрева ее до термоядерных температур, равных по порядку величины  $10^8$  °К. Такие температуры могут быть достигнуты при помощи имеющихся источников энергии только в том случае, если потери частиц из области удержания свести к минимуму. Кроме того, потери энергии из термоядерной установки могут происходить в результате других эффектов, например, из-за потерь импульса, связанных с вязкостью, а также потерь тепла, связанных с излучением и теплопроводностью плазмы.

В § 7.1—7.3 рассмотрим движение и удержание частиц в некоторых магнитных полях с регулярной геометрией, а в § 7.4 обсудим некоторые механизмы потерь, приводящих к уходу частиц из магнитной ловушки.

### § 7. 1. ОБЗОР РАЗЛИЧНЫХ ПРИНЦИПОВ УДЕРЖАНИЯ

Существуют различные принципы удержания плазмы магнитным полем. Как показало изучение движения отдельных частиц, полная скорость частицы  $\vec{w}$  состоит из



трех компонент  $\vec{W}$ ,  $\vec{u}_{\parallel}$  и  $\vec{u}_{\perp}$ , которые представляют собой соответственно вращение по ларморовской орбите, продольный и поперечный дрейфы ведущего центра. Вращение по ларморовской орбите в первом приближении можно считать замкнутым движением, и потому удержание частиц определяется главным образом дрейфовым движением  $\vec{u}_{\parallel}$  и  $\vec{u}_{\perp}$  ведущего центра. Таким образом, для создания абсолютной ловушки необходимо предусмотреть, чтобы дрейфовое движение не приводило к уходу частиц из системы. Для этого используют ловушки, в которых траектории частиц внутри предполагаемой области удержания являются замкнутыми, или создают на границе предполагаемой области удержания точки поворота для движения частиц. Чтобы избежать потерь частиц, обусловленных продольным дрейфом  $\vec{u}_{\parallel}$ , необходимо создать магнитное поле, силовые линии которого не выходят из области, занятой плазмой, или использовать некоторую возвращающую силу, заставляющую частицы двигаться вдоль силовых линий в область, занятую плазмой. Последнее достигается при помощи магнитных пробок или центробежной силы.

Для того чтобы избежать потерь частиц, обусловленных поперечным дрейфом  $\vec{u}_{\perp}$ , необходимо выбрать геометрию внешнего магнитного поля и других силовых полей такой, чтобы траектории частиц не выходили во внешнюю область. Кроме того, можно создать точки поворота для скорости  $\vec{u}_{\perp}$ , например при помощи осциллирующих полей. В этом случае для компенсации поперечного смещения частицы за полный период движения вокруг всей конфигурации можно воспользоваться «вращательным преобразованием».

При рассмотрении движения отдельных частиц несущественно, создаются ли магнитные и электрические поля внешними токами и пространственными зарядами или внутренними. Но это справедливо, конечно, до тех пор, пока не учитываются условия равновесия и устойчивости стационарного состояния плазмы. При изменении состояния плазмы внутренние токи и пространственные заряды приводят к изменению результирующего магнитного поля и таким образом влияют на удержание

**Методы удержания высокотемпературной плазмы. В аксиально симметричных конфигурациях полоидальное магнитное поле расположено в плоскостях, проходящих через ось симметрии конфигурации, а тороидальное направлено перпендикулярно этим плоскостям. Устойчивость плазмы в предложенных конфигурациях не исследуется**

Способ удержания плазмы	Направление магнитных силовых линий	Продольный дрейф $\vec{u}_{\parallel}$	Поперечный дрейф $\vec{u}_{\perp}$	Приложенное, т. е. внешнее магнитное поле	Собственное магнитное поле
Тороидальный пинч	Внутри плазмы замкнутые силовые линии	Замыкается внутри плазмы	На стенки; частично подавляется вращательным преобразованием, связанным с собственным магнитным полем	Внешнее тороидальное поле; дополнительные поля индуцируются токами, текущими по стенкам камеры	Винтовое
Стелларатор	То же	То же	На стенки, но подавляется вращательным преобразованием	Винтовое	»
Кольцевой ток без подводящих проводников (левитро:) или с экранированными подводящими проводниками	Замыкаются всюду внутри плазмы, за исключением нулевых линий, расположенных вдоль экранированных подводящих проводников	»	Замыкается внутри плазмы везде, кроме области экранированных подводящих проводников	»	»

Астрон, плазменный бетатрон	Замыкается внутри плазмы	Замыкается внутри плазмы	Замыкается внутри плазмы	Полоидальное· частично связано с током релятивистских электронов	Полоидальное
Ловушки с магнитными пробками, остроконечная геометрия, магнитное поле типа «пикет фенс»	На стенки	На стенки; подавляется при помощи магнитных пробок	То же	Полоидальное	»
Вращающаяся плазма с большим радиальным отношением	»	На стенки; подавляется центробежной силой или с помощью магнитных пробок	»	»	»

плазмы. В таблице приведены различные способы удержания плазмы.

Прежде чем перейти к детальному анализу магнитных ловушек, следует отметить, что плазму можно удерживать не только постоянным магнитным полем, но и другими способами. Так, например, было предложено несколько методов удержания плазмы при помощи высокочастотных полей [116, 23]. Если даже такие методы удержания окажутся недостаточно совершенными, их можно будет применять в ловушках с магнитными пробками для уменьшения потерь частиц из системы. Последние эксперименты [117] показали, что потери частиц вдоль магнитных силовых линий можно уменьшить, если использовать давление электромагнитных волн. Поэтому этот метод удержания плазмы можно использовать для уменьшения потерь энергии, связанных с уходом частиц. Однако не следует забывать, что метод удержания требует дополнительного подвода энергии к системе для создания давления электромагнитных волн.

## **§ 7. 2. ЗАПРЕЩЕННЫЕ ОБЛАСТИ**

Точные уравнения движения позволяют сделать некоторые общие заключения о возможности удержания частиц в магнитных полях с высокой степенью симметрии. Например, в таких магнитных полях можно найти некоторые запрещенные области для движения частиц, даже не зная точной траектории частицы. Подобные примеры мы уже встречали в разделах 4.2 и 4.3 гл. 2, где рассматривались запрещенные области для магнитного поля линейного тока, а также для дипольного и гиперболического магнитных полей.

В этом параграфе мы исследуем аксиально-симметричные полоидальные или тороидальные поля. Силовые линии полоидального поля расположены в плоскостях, проходящих через ось симметрии, подобно основной составляющей земного магнитного поля, через земные полюса. Силовые линии тороидального поля расположены перпендикулярно этим плоскостям. Содержание следующего параграфа основано на результатах Штермера [56], Косслета [118], Люста и Шлютера [119], Ленерта [120—122], Фиссера и Киппенхана [123], Хертвека [59], Бонневье и Ленерта [124].

## 2.1. Симметричные конфигурации

Введем канонические координаты  $q_k$  и импульсы  $p_k$ , определенные в § 2.3. Определим также элементы длины  $dl_k$  и масштабные множители  $h_k = h_k(q_k)$ , связанные следующим образом с координатами  $q_k$

$$dl_k = h_k dq_k, \quad \omega_k = \frac{dl_k}{dt} = h_k \dot{q}_k. \quad (7.1)$$

Тогда для прямоугольной системы координат  $q_k = (x, y, z)$  получим  $h_k = 1$ , а для цилиндрической системы координат  $q_k = (r, \varphi, z)$  масштабные множители равны  $h_r = 1$ ,  $h_\varphi = r$ ,  $h_z = 1$ . В дальнейшем будем считать, что координаты  $q_k$  ортогональны.

При этом лагранжиан (2.47) примет вид

$$L = \frac{1}{2} m \sum_k (h_k \dot{q}_k)^2 - m\varphi_g - q\varphi + q \sum_k (h_k \dot{q}_k A_k). \quad (7.2)$$

В соответствии с формулой (2.51) обобщенные импульсы равны

$$p_k = mh_k^2 \dot{q}_k + qh_k A_k. \quad (7.3)$$

Подставим теперь эти соотношения в выражение для гамильтониана (2.52)

$$H = \frac{1}{2} m \sum_k (h_k \dot{q}_k)^2 + m\varphi_g + q\varphi. \quad (7.4)$$

Используя соотношение (7.3) для исключения величин  $\dot{q}_k$ , получаем окончательное выражение для гамильтониана

$$H = \frac{1}{2m} \sum_k \frac{(p_k - qh_k A_k)^2}{h_k^2} + m\varphi_g + q\varphi = H(q_k, p_k, t). \quad (7.5)$$

При этом, как показано в разделе 3.1 гл. 2, переменные  $(q_k, p_k, t)$  могут считаться независимыми. Предположим, что потенциалы внешних полей  $A$ ,  $\varphi$  и  $\varphi_g$ , а также масштабные множители  $h_k$  не зависят от некоторой координаты  $q_j$ . В этом случае говорят, что такая координата является циклической. В качестве примера таких координат можно назвать координату  $\varphi = q_j$  в цилиндриче-

ской симметричной конфигурации и координату  $z=q_j$  в двумерной конфигурации, когда все величины не меняются вдоль оси  $z$ . Тогда гамильтониан (7.5) не будет явно содержать координату  $q_j$ . Полагая  $\chi=p_j$ , из уравнения (2.59) получаем

$$\frac{dp_j}{dt} = 0, \quad p_j = \text{const} = p_{j0} = mh_{j0}^2 \dot{q}_{j0} + qh_{j0} A_{j0}, \quad (7.6)$$

где  $p_{j0}$  — обобщенные импульсы частицы в начальной точке  $(q_{m0}, q_{j0}, q_{n0})$  и в начальный момент времени  $t_0$ , а  $q_m$  и  $q_n$  обозначают две остальные координаты, перпендикулярные  $q_j$ .

Теперь подставим полученный результат (7.6) в выражение (7.5) для гамильтониана. Вычислим следующую функцию от скоростей  $\omega_m$  и  $\omega_n$ , которые соответствуют координатам  $q_m$  и  $q_n$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{eq} \equiv \frac{1}{2} m (\omega_m^2 + \omega_n^2) = H - H_0 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 + m (\Phi_{g0} - \Phi_g) + \\ + q (\Phi_0 - \Phi) - \frac{1}{2mh_j^2} [mh_{j0} \omega_{j0} + q(h_{j0} A_{j0} - h_j A_j)]^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Из формулы (7.4) следует, что полученное выражение не содержит явно величин  $A_m$  и  $A_n$ . При этом величина  $\Phi_{eq}$ , равная кинетической энергии движения в плоскости  $mn$ , должна быть положительной. В дальнейшем мы убедимся, что ее можно рассматривать как эквивалентный потенциал при движении в плоскости  $mn$ . Обратимся теперь к физическому анализу полученных результатов. Предположим, что векторный потенциал  $A$  имеет только одну компоненту  $A_j$  в направлении циклической координаты  $q_j$ . Так будет, например, в случае полоидального магнитного поля с осью  $z$ , направленной вдоль оси симметрии; при этом  $\varphi$  — циклическая координата. В качестве другого примера можно привести магнитное поле системы параллельных линейных токов, когда циклической координатой является координата  $z$ , если ось  $z$  направлена параллельно токам. При этом магнитный поток, охватываемый контуром  $C$ , будет равен

$$\Phi = \iint_{\hat{C}} \vec{n} \cdot \vec{B} ds = \oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} = \oint_C A_j h_j dq_j. \quad (7.8)$$

Как видно из рис. 7.1, *a* и *б*, элемент длины контура будет направлен вдоль  $A_j$ . Для таких контуров магнитный поток сохраняется, если подинтегральное выражение в формуле (7.8) постоянно. В этом случае соотношение

$$A_j h_j = \text{const} \quad (7.9)$$

описывает поведение магнитных силовых линий в плоскости  $mn$ . На рис. 7.1, *a* показан ход силовых линий для

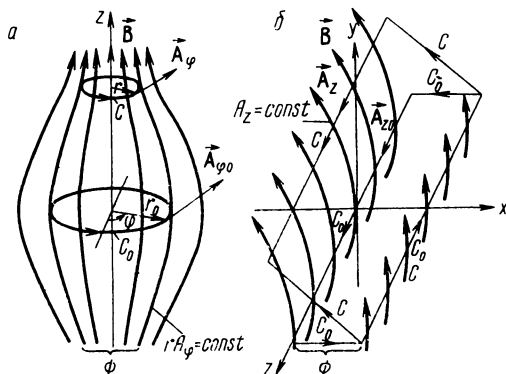


Рис. 7.1. Магнитные силовые линии образуют границы областей, охватывающих один и тот же магнитный поток  $\Phi$ :

*a* — цилиндрическая симметрия для полоидального магнитного поля. Интервал уравнения (7.8) имеет равные значения для двух контуров  $C_0$  и  $C$ , которые касаются одних и тех же силовых линий, *б* — двумерный случай для поля, образованного системой прямых токов, которые текут вдоль оси  $z$ . Интеграл уравнения (7.8) имеет равные значения для двух контуров  $C_0$  и  $C$ .

полоидального магнитного поля, а на рис. 7.1, *б* — для магнитного поля прямых токов. При этом уравнения силовых линий соответственно равны  $rA = \text{const}$  и  $A_z = \text{const}$ . Тороидальное магнитное поле — это частный случай магнитного поля, изображенного на рис. 7.1, *б*, когда прямые токи расположены симметрично вокруг оси  $z$ , а магнитные силовые линии образуют окружности в плоскости  $xy$  с центрами, лежащими на оси  $z$ .

Эквивалентный потенциал  $\varphi_{eq}$ , определяемый формулой (7.7), не может принимать отрицательных значений. Следовательно, запрещенной областью для частицы, на-

ходящейся в начальный момент времени в некоторой точке  $(q_{m0}, q_{j0}, q_{n0})$ , будет такая область пространства, в которой крайнее правое выражение в формуле (7.7) становится отрицательным. Это возможно в том случае, если последний член в квадратных скобках превышает все остальные члены в этой части равенства.

Сравним теперь вклад  $qh_j A_j$  от последнего члена в квадратных скобках с  $mh_{j0}\omega_{j0}$  и с остальными членами вне квадратных скобок в этой части равенства (7.7). Если магнитное поле достаточно велико, то ларморовский радиус становится небольшим по сравнению с характерной длиной  $L_{CB} = A/|\text{rot}\vec{A}|$ , на которой заметно меняется магнитное поле  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ . При этом период ларморовского вращения  $t_g$  также мал по сравнению с временами  $\varphi/BL^2_{CB}$  и  $m\varphi_g/eBL^2_{CB}$ . Приведенные выражения определяют промежутки времени, за которые заметно изменяется магнитное поле в системах отсчета, движущихся соответственно со скоростями электрического дрейфа  $\vec{u}_E$  и гравитационного дрейфа  $\vec{u}_g = -m \nabla \varphi_g \times \vec{B} / qB^2$  частиц. Поэтому в сильном магнитном поле каждый из членов  $h_{j0}A_{j0}$  и  $h_j A_j$  в выражении (7.7) дает вклад, значительно превышающий вклады всех других членов в этом выражении. Следовательно, достаточно небольшого смещения траектории частицы из плоскости  $h_j A_j = h_{j0}A_{j0}$ , чтобы первая часть второго из равенств в формуле (7.7) стала отрицательной; другими словами, это привело бы к смещению частицы в запрещенную область. Поэтому можно заключить, что частица будет оставаться в узкой области плоскости  $mn$  вблизи магнитной силовой линии  $h_j A_j = h_{j0}A_{j0}$ . При этом ширина области по порядку величины равна ларморовскому радиусу.

Следует отметить, что этот результат получен для зависящего от времени магнитного поля, когда  $dH/dt = \partial H/\partial t$  согласно разделу 3.2 гл. 2. В стационарном случае силовая линия  $h_j A_j = h_{j0}A_{j0}$  не перемещается в пространстве и ее проекция на плоскость  $mn$  проходит через начальную точку. Если же магнитное поле изменяется во времени, то поверхности  $h_j A_j(t) = h_{j0}A_{j0}$  все еще можно определить при помощи магнитных силовых линий, но силовые линии при этом будут «двигаться»



в пространстве. Как было показано выше для некоторых симметричных конфигураций магнитного поля, в этом случае частицы следуют за движущимися магнитными силовыми линиями так, чтобы магнитный поток (7.8) сохранялся. При этом магнитные силовые линии действуют подобно магнитному поршню, сжимающему плазму.

Для аксиально-симметричного случая результатам (7.3) и (7.6) нетрудно дать простую физическую интерпретацию. В лабораторной системе отсчета электрическое и магнитное поля определяются выражениями

$$\vec{E} = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial A_r}{\partial t}, \frac{\partial A_\varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) \quad (7.10)$$

и

$$\vec{B} = \left( - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right). \quad (7.11)$$

В системе отсчета, связанной с частицей, электрическое поле равно  $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{\omega} \times \vec{B}$ . При этом момент сил относительно оси симметрии, действующий на частицу в этой системе отсчета, равен

$$\begin{aligned} qrE'_\varphi &= - \left( \frac{\partial}{\partial t} + \omega_r \frac{\partial}{\partial r} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (r A_\varphi) = \\ &= - \frac{d}{dt} (r A_\varphi). \end{aligned} \quad (7.12)$$

В то же время он должен быть равен производной по времени от механического углового момента частицы  $mr\omega_\varphi$ . Отсюда получается формула (7.6) с  $p_\varphi = mr\omega_\varphi + qrA_\varphi$ . В заключение приведем несколько примеров равновесных конфигураций, где  $H = H_0$ .

1. В полоидальном поле (см. рис. 7.1, а) эквивалентный потенциал описывается формулой

$$\begin{aligned} \varphi_{eq} &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 + m (\varphi_{g0} - \varphi_g) + q (\varphi_0 - \varphi) - \\ &- \frac{1}{2mr^2} [mr_0\omega_{\varphi 0} + q(r_0 A_{\varphi 0} - r A_\varphi)]^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Так как величина  $\varphi_{eq}$  не может быть отрицательной, то запрещенные области в сильном магнитном поле рас-

положены вне узкой полосы в плоскости  $rz$  около магнитной силовой линии  $rA_\varphi = r_0 A_{\varphi 0}$ . Это условие достаточно для существования запрещенных областей, но оно не всегда оказывается необходимым. В разделе 2.2 будет показано, что запрещенные области могут быть шире тех областей, границы которых определяются из условия (7.13). Заметим при этом, что условие (7.13) не изменяется при наложении тороидального поля  $A_z = A_z(r)$ . Если магнитное поле чисто полоидальное, как это показано на рис. 7.1, *а*, то, очевидно,  $\vec{A} = (0, A_\varphi, 0)$  и уравнение движения в плоскости  $rz$  принимает вид

$$m\ddot{r} = -\nabla\Phi_{eq}, \quad (7.14)$$

как нетрудно убедиться, воспользовавшись непосредственно уравнением движения (2.36). При этом частица будет двигаться в области минимума эквивалентного потенциала  $\Phi_{eq}$  вблизи магнитной силовой линии, проходящей через начальную точку  $(r_0, \varphi_0, z_0)$ .

Рассмотрим интересный случай, когда магнитное поле однородно ( $\varphi_g = 0$ ), а электрическое поле приложено в радиальном направлении. Предположим, что электрическое поле достаточно велико и начальная скорость частицы  $\omega_0$  незначительна. Именно такие условия возникают в магнетроне. При этом электрон, который в начальный момент времени находится на поверхности  $r = r_0$ , не сможет достичь поверхности  $r = r_1$ , если магнитное поле  $B_0 = 2A_\varphi / r$  удовлетворяет следующему условию:

$$B_0^2 > \frac{8m(\varphi_1 - \varphi_0)}{er_1^2 \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^2 \right]^2}, \quad (7.15)$$

где  $\varphi_1 > \varphi_0$  и  $r_1 > r_0$ . Неравенство (7.15) представляет собой условие обрезания электронного тока в магнетроне.

2. Если магнитное поле создается системой прямых токов, как это показано на рис. 7.1, *б*, то эквивалентный потенциал можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{eq} = & \frac{1}{2} m\omega_0^2 + m(\varphi_{g0} - \varphi_g) + q(\varphi_0 - \varphi) - \\ & - \frac{1}{2m} [m\omega_{z0} + q(A_{z0} - A_z)]^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Движение частицы в плоскости  $xu$  подчиняется уравнению, которое аналогично уравнению (7.14).

Для тороидального поля векторный потенциал имеет одну компоненту  $\vec{A} = (0, 0, A_z)$ , причем  $A_z \sim \ln(1/r)$ . В этом случае частицы удерживаются в цилиндрических слоях, расположенных вокруг оси симметрии системы, причем толщина этих слоев по порядку величины равна ларморовскому радиусу. Так будет только в том случае, если справедливо предположение  $\partial H / \partial z = 0$ . В дальнейшем мы увидим, к чему приводит разделение зарядов в направлении оси  $z$  и соответствующее изменение электрического потенциала  $\phi$ . В этом случае возникает аксиальное электрическое поле  $-\partial\phi/\partial z$ , и гамильтониан будет зависеть от  $z$ .

На рис. 7.2 приведено результирующее магнитное поле системы двух проводников с током, параллельных оси  $y$ , которые помещены во внешнее однородное магнитное поле  $B_0$ , направленное вдоль оси  $z$ . Расстояние между проводниками равно  $2d_1$ . Если токи направлены так, как это показано на рис. 7.2, и их величины равны  $I_1 = \pm 4\pi d_1 B_0 / \mu_0$ , то на проводники не действуют электродинамические силы. Кроме того, в этом случае вокруг проводников расположена область, в которой магнитные силовые линии обходят вокруг их центров. Эта область ограничена поверхностью  $S$ , которая соответствует постоянному значению векторного потенциала  $A_z$ . Рассмотрим частицу, которая приближается к области, занятой проводниками, из бесконечности вдоль произвольного направления. Тогда из уравнения (7.16) следует, что если магнитное поле доста-

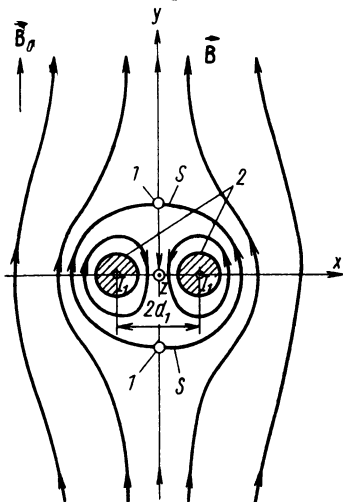


Рис. 7.2. Пара бесконечных проводников, помещенных в однородное магнитное поле  $B_0$ , направленное вдоль оси  $z$ . Сила взаимодействия между этими проводниками отсутствует: 1 — нулевая линия; 2 — проводники

точно велико, то частица не сможет достигнуть поверхностей проводников. Это происходит потому, что значения величины  $qA_z$  на поверхностях проводника и  $S$  сильно различаются.

## 2.2. Вращающиеся системы

В предыдущем параграфе было показано, что при некоторых условиях частицы могут удерживаться магнитным полем. В продольном направлении частицы удерживаются, например, двумя магнитными пробками. Как было показано в гл. 6, удержание плазмы возможно только в том случае, если компоненты скорости частицы связаны между собой определенным образом. Здесь мы рассмотрим другую возможность уменьшения потерь частиц в продольном направлении. Такое удержание связано с возникновением во вращающейся системе центробежного ускорения, которое по существу является искусственной гравитационной силой. Впервые такой способ удержания был предложен в работах [49—51, 122, 124, 127].

Рассмотрим частицу, радиус-вектор которой в лабораторной системе координат равен  $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ . Введем в этой системе три ортогональных вектора:  $\vec{x}^*(t)$ ,  $\vec{y}^*(t)$ ,  $\vec{z}^*(t)$ , сумма которых равна радиус-вектору в произвольный момент времени

$$\vec{\rho}(t) = x^* \hat{x}^* + y^* \hat{y}^* + z^* \hat{z}^* \equiv \vec{\rho}^*. \quad (7.17)$$

Здесь  $\hat{x}^*$ ,  $\hat{y}^*$ ,  $\hat{z}^*$  — единичные векторы, зависящие от времени. Найдем скорость частицы

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\rho}} = \dot{x}^* \hat{x}^* + y^* \dot{\hat{x}}^* + \dot{y}^* \hat{y}^* + y^* \dot{\hat{y}}^* + \dot{z}^* \hat{z}^* + z^* \dot{\hat{z}}^* + z^* \dot{\hat{x}}^* + y^* \dot{\hat{y}}^* + z^* \dot{\hat{z}}^*, \quad (7.18)$$

где точка обозначает производную по времени. Аналогично можно получить выражение для ускорения частицы

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \ddot{\vec{\rho}} = \ddot{x}^* \hat{x}^* + y^* \ddot{\hat{x}}^* + \ddot{y}^* \hat{y}^* + y^* \ddot{\hat{y}}^* + \ddot{z}^* \hat{z}^* +$$

$$+ 2 \left( \dot{\hat{x}}^* \hat{x}^* + \dot{\hat{y}}^* \hat{y}^* + \dot{\hat{z}}^* \hat{z}^* \right) + \ddot{\hat{x}}^* \hat{x}^* + \ddot{\hat{y}}^* \hat{y}^* + \ddot{\hat{z}}^* \hat{z}^*. \quad (7.19)$$

Дадим теперь точное определение векторов  $\vec{x}^*$ ,  $\vec{y}^*$  и  $\vec{z}^*$ , полагая  $\vec{z}^* = \vec{z}\hat{z}$ , а также

$$\dot{\hat{x}}^* = \vec{\Omega} \times \hat{x}^*, \quad \dot{\hat{y}}^* = \vec{\Omega} \times \hat{y}^* \quad (7.20)$$

и

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{x}}^* &= \dot{\vec{\Omega}} \times \hat{x}^* + \vec{\Omega} \times \dot{\hat{x}}^*, \\ \ddot{\hat{y}}^* &= \dot{\vec{\Omega}} \times \hat{y}^* + \vec{\Omega} \times \dot{\hat{y}}^*, \end{aligned} \quad (7.21)$$

где  $\vec{\Omega} = \vec{z}\hat{\Omega}$  — функция времени и величины  $\hat{x}^{*2} + \hat{y}^{*2}$ . Это означает, что векторы  $\vec{x}^*$  и  $\vec{y}^*$  вращаются с угловой скоростью  $\vec{\Omega}$ , которая является функцией времени и расстояния от оси вращения  $\vec{z} = \vec{z}\hat{z}$ . Таким образом, можно считать что векторы  $\vec{x}^*$ ,  $\vec{y}^*$ ,  $\vec{z}^*$  определяют систему отсчета, которая вращается вокруг оси  $z$  с локальной мгновенной угловой скоростью  $\vec{\Omega}$ , а вектор  $\vec{\rho}^*$  служит при этом радиус-вектором частицы в новой системе координат. Скорость и ускорение частицы в этой системе отсчета равны соответственно

$$\begin{aligned} \vec{w}^* &= \dot{\hat{x}}^* \hat{x}^* + \dot{\hat{y}}^* \hat{y}^* + \dot{\hat{z}}^* \hat{z}^*, \\ \frac{d\vec{w}^*}{dt} &= \ddot{\hat{x}}^* \hat{x}^* + \ddot{\hat{y}}^* \hat{y}^* + \ddot{\hat{z}}^* \hat{z}^*. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Комбинируя уравнения (7.17) — (7.22), можно получить выражения для скорости

$$\vec{w} = \vec{w}^* + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}^* \quad (7.23)$$

и абсолютного ускорения

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}^*}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{\omega}^* - \vec{\Omega} \times (\vec{\rho}^* \times \vec{\Omega}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{\rho}^*. \quad (7.24)$$

Второй член в правой части уравнения (7.24) представляет собой кориолисову силу, а третий — центробежную силу. Уравнение движения во вращающейся системе координат принимает следующий вид [164]:

$$m \frac{d\vec{\omega}^*}{dt} = q\vec{E} + q\vec{\omega}^* \times \vec{B} + q(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}^*) \times \vec{B} + 2m\vec{\omega}^* \times \vec{\Omega} - \\ - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\rho}^*) + m\vec{\rho}^* \times \frac{d\vec{\Omega}}{dt} - m\nabla\varphi_g. \quad (7.25)$$

В аксиально-симметричном случае, когда в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  величины не зависят от координаты  $\varphi$ , электрическое и магнитное поля можно найти из уравнений (7.10) и (7.11). При этом  $\varphi$ -я компонента уравнения (7.25) равна

$$\frac{d}{dt} \left( r\omega_\varphi^* + \frac{q}{m} r A_\varphi \right) + 2\Omega r \frac{dr}{dt} + \frac{d\Omega}{dt} r^2 = 0. \quad (7.26)$$

Интегрируя уравнение (7.26) по времени, получаем

$$mr\omega_\varphi^* + qrA_\varphi + m\Omega r^2 = mr_0\omega_{\varphi 0}^* + qr_0A_{\varphi 0} + \\ + m\Omega_0 r_0^2 = p_{\varphi 0}. \quad (7.27)$$

Здесь  $p_{\varphi 0}$  — постоянная величина, которая имеет вид обобщенного углового момента. Этот результат, эквивалентный выражению (7.6), можно также получить, если подставить выражение (7.23) для  $\vec{\omega}$  в формулу (7.6). Преобразуем теперь уравнение (7.25) к виду, эквивалентному уравнению (2.36). Введем для этого следующие модифицированные потенциалы:

$$\vec{A}^* = \vec{A} + \frac{m}{q} \vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad \vec{r} = (r, 0, 0) \quad (7.28)$$

и

$$\varphi^* = \varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{q} \Omega^2 r^2 + \Omega \left( \frac{p_{\varphi 0}}{q} - r A_\varphi \right). \quad (7.29)$$

Они соответствуют модифицированным электрическому и магнитному полям

$$\begin{aligned} \vec{E}^* = -\vec{\nabla}\varphi^* - \frac{\partial \vec{A}^*}{\partial t} = \vec{E} + \frac{m}{q} \Omega r \vec{\nabla}(\Omega r) - \\ - \vec{\nabla} \left( \frac{\Omega \rho_{\varphi 0}}{q} - \Omega r A_{\varphi} \right) + \frac{m}{q} \vec{r} \times \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.30)$$

и

$$\vec{B}^* = \text{rot } \vec{A}^* = \vec{B} + 2 \frac{m}{q} \vec{\Omega} - \frac{m}{q} (\vec{r} \times \hat{\vec{\Omega}}) \times \vec{\nabla} \Omega. \quad (7.31)$$

Используя введенные нами определения, преобразуем уравнение (7.25)

$$m \frac{d\vec{w}^*}{dt} = q \vec{E}^* + q \vec{w}^* \times \vec{B}^* - m \vec{\nabla} \varphi_g. \quad (7.32)$$

В справедливости этого соотношения нетрудно убедиться, если подставить выражения (7.30) и (7.31) в уравнение (7.32) и воспользоваться определениями (7.11) и (7.27). Полученное уравнение (7.32) аналогично уравнению движения (2.36). Особый интерес представляют вторые члены в правых частях уравнений (7.30) и (7.31), которые соответствуют центробежной и кориолисовой силам.

Уравнение (7.32) представляет собой уравнение движения во вращающейся системе координат. При его выводе использованы явные выражения для ускорений, которые возникают из-за вращения, и выражения для соответствующих поперечных дрейфов частиц. Если модифицированное электрическое поле  $\vec{E}^*$  удовлетворяет условию из § 3.1, то на основе уравнения движения (7.32) во вращающейся системе координат можно построить дрейфовую теорию с точностью до членов первого порядка по параметру  $\epsilon$ .

Теперь снова рассмотрим запрещенные области, причем магнитное поле будем считать стационарным. Согласно уравнениям (7.28), (7.29), (7.32), эквивалентный потенциал во вращающейся системе координат будет определяться тем же выражением (7.13), но только вместо величин  $\vec{A}$ ,  $\varphi$ ,  $\vec{w}$  следует подставить соответственно

модифицированные величины  $\vec{A}^*$ ,  $\varphi^*$ ,  $\vec{\omega}^*$ . В результате получим вместо выражения (7.13) для эквивалентного потенциала следующую формулу для модифицированного эквивалентного потенциала:

$$\begin{aligned} \varphi_{e q}^* = & \frac{1}{2} m (\omega_r^{*2} + \omega_z^{*2}) = \frac{1}{2} m \omega_0^{*2} + m (\varphi_{g_0} - \varphi_g) + \\ & + q (\varphi_0 - \varphi) - q (\Omega_0 r_0 A_{\varphi_0} - \Omega r A_{\varphi_0}) + (\Omega_0 - \Omega) p_{\varphi_0} - \\ & - \frac{1}{2} m (\Omega_0^2 r_0^2 - \Omega^2 r^2) - \frac{1}{2 m r^2} [m r_0 \omega_{\varphi_0}^* + \\ & + q (r_0 A_{\varphi_0} - r A_{\varphi}) + m \Omega_0 r_0^2 - m \Omega r^2]^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Такой же результат можно было получить, подставляя выражение (7.23) в формулу (7.13) и группируя члены соответствующим образом. Кроме того, выражение (7.33) нетрудно вывести при помощи формулы (7.27), комбинируя ее с законом сохранения энергии (2.38).

До сих пор угловая скорость  $\vec{\Omega}$  не была явно определена. Рассмотрим теперь плазму, помещенную в полоидальное магнитное поле (рис. 7.3). Рассмотрим случай, когда продольная и поперечная энергии частицы сравнимы по величине. При этом поперечная энергия частицы много меньше той энергии, которая соответствует поперечной разности потенциалов во всей макроскопической конфигурации. Так как частицы могут свободно двигаться вдоль магнитных силовых линий, то естественно предположить, что продольная компонента  $\vec{E}_{\parallel}$  приложенного электрического поля  $\vec{E}$  будет мала по сравнению с поперечной компонентой  $\vec{E}_{\perp}$ . Другими словами, предположим, что продольная компонента  $\vec{E}_{\parallel}$  является величиной первого порядка малости по сравнению с перпендикулярной компонентой  $\vec{E}_{\perp}$  электрического поля. В наименьшем порядке по параметру  $\epsilon$  это согласуется с приближением (3.34). Следовательно, в дальнейшем будем считать, что электрическое поле изменяется таким образом, что вдоль магнитных силовых линий электрический потенциал почти не меняется. В общем случае для этого требуется существование не-



которого пространственного заряда. Если разность электрического потенциала между двумя магнитными поверхностями, ограничивающими узкую цилиндрическую область, равна  $d\varphi$ , то величина электрического поля равна  $E = -d\varphi/dl_{\perp}$ , а направление электрического поля показано на рис. 7.3. В наименьшем порядке по параметру  $\epsilon$  все заряженные частицы движутся со скоростью электрического дрейфа. При этом вся плазма вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью

$$\vec{\Omega} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{rB^2}. \quad (7.34)$$

Полученное соотношение может служить определением угловой скорости  $\vec{\Omega}$ . Оно означает, что из полной скорости движения частицы мы выделили скорость электрического дрейфа частицы и ввели такую систему отсчета, в которой скорость электрического дрейфа равна нулю. Магнитный поток  $d\Phi = 2\pi r B dl_{\perp}$ , заключенный между введенными выше двумя магнитными поверхностями, следующим образом связан с разностью электрического потенциала  $d\varphi$  и величиной угловой скорости  $\Omega$ :

$$\Omega = -\frac{E}{Br} = 2\pi \frac{d\varphi}{d\Phi} = \frac{d\varphi}{d(rA_{\varphi})}. \quad (7.35)$$

Следует отметить, что величины  $d\varphi$  и  $d\Phi$  постоянны в области между двумя магнитными поверхностями и, следовательно, плазма будет вращаться с угловой скоростью  $\Omega = \Omega_0$ , постоянной вдоль всей длины магнитной силовой линии. Это согласуется с законом изоротации, впервые установленным Ферраро [7].

Пусть магнитное поле настолько велико, что вклады в выражение (7.33) от членов  $r_0 A_{\varphi 0}$  и  $r A_{\varphi}$  значительно больше вкладов от всех других членов в том же выражении. Такое предположение справедливо при выполне-

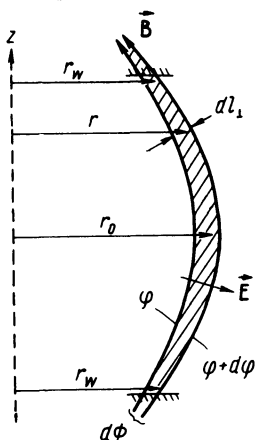


Рис. 7.3. Поперечное сечение тонкого тороидального слоя, образованного силовыми линиями полоидального магнитного поля  $\vec{B}$  (заштрихованная область). Электрическое поле  $\vec{E}$  приложено под прямым углом к магнитному полю  $\vec{B}$ .

нии условий, которые уже обсуждались в связи с уравнением (7.7). Это означает, что угловая частота  $\Omega$  должна быть много меньше циклотронной частоты  $\omega_g$ . Отсюда следует, что частица будет удерживаться в узкой области вблизи силовой линии  $rA_\varphi = \text{const}$ , как это показано на рис. 7.3. При этом в развитом выше подходе, где вращение выделяется при помощи преобразования (7.23), можно получить бо́льшую информацию о запрещенных областях, чем непосредственно из уравнения (7.13). Так как частица должна двигаться внутри области, ограниченной магнитными поверхностями, то величина угловой скорости  $\Omega$  будет близка к  $\Omega_0$  вдоль всей траектории частицы. Согласно уравнению (7.35), третий и четвертый члены в выражении (7.33) сокращаются в пределе бесконечно сильного магнитного поля. В этом предельном случае можно получить следующее выражение для эквивалентного потенциала в отсутствие гравитационного поля:

$$\begin{aligned} \Phi_{eq}^* = & \frac{1}{2} m \omega_0^{*2} - \frac{1}{2} m \Omega_0^2 (r_0^2 - r^2) - \\ & - \frac{1}{2mr^2} [mr_0 \omega_{\varphi 0}^* + q(r_0 A_{\varphi 0} - r A_\varphi) + \\ & + m \Omega_0 (r_0^2 - r^2)]^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Второй член в правой части этого выражения характеризует работу, которую совершает частица против центробежной силы. Последний член в квадратных скобках связан с кориолисовой силой. Для зависящего от времени магнитного поля, когда угловая скорость вращения системы равна  $\Omega = \Omega(t)$ , можно также вывести условие, аналогичное условиям (7.7) и (7.33). Однако мы не будем здесь детально анализировать этот случай. Соотношение (7.36) показывает, что для частицы, которая расположена внутри области  $r > r_{ic}$ , приведенной на рис. 7.3, возможно абсолютное удержание при условии, что тепловая энергия  $\frac{1}{2} m \omega_0^{*2}$  в начальной точке  $r_0$  будет меньше центробежной энергии  $\frac{1}{2} m \Omega_0^2 (r_0^2 - r_w^2)$ . При этом последнее выражение для достаточно большого отноше-

ния  $r_0/r_c$  равно  $\frac{1}{2} m\Omega_0^2 r_0^2$ . При  $\Omega \ll \omega_g$  вклад от последнего члена в квадратных скобках выражения (7.36), связанного с кориолисовой силой, становится малым. Он влияет только на форму «дна» в потенциальной «яме», соответствующей модифицированному эквивалентному потенциалу  $\Phi_{eq}^*$ . Это следует из формулы (7.31), показывающей, что частица движется в эквивалентном магнитном поле  $\vec{B}^*$ , которое несколько отличается от магнитного поля  $\vec{B}$  в лабораторной системе координат. Таким образом, в предельном случае бесконечно малого ларморовского радиуса частица не будет больше двигаться точно вдоль магнитных силовых линий. При этом частица незначительно отклонится от направления магнитных силовых линий. Это отклонение возникает из-за кориолисовой силы и зависит от отношения  $m/q$ . Как мы увидим в дальнейшем, такой эффект может влиять на разделение заряда, хотя при рассмотрении запрещенных областей он не имеет существенного значения.

### **§ 7. 3. УДЕРЖАНИЕ ЧАСТИЦ В РАЗЛИЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Для удержания высокотемпературной плазмы предложено большое число методов, в которых используются различные конфигурации магнитного поля. Обсудим некоторые конкретные примеры таких конфигураций с точки зрения теории запрещенных областей, рассматривая траектории отдельных частиц.

#### **3. 1. Полоидальные поля**

Принципиальная схема ловушек с магнитными пробками, которые исследовались в работах [106, 128], приведена на рис. 6.3. При этом плазма удерживается двумя магнитными пробками, расположенными вблизи точек  $s=s_1$  и  $s=s_2$ , и сжимается магнитным полем, как это описано в разделе 2.1 гл. 6.

Отражение частиц магнитными пробками можно рассматривать при помощи уравнений (3.17) и (4.6) для

продольного движения отдельных частиц. Так как магнитный момент частицы сохраняется при движении, то

$$m \frac{du_{\parallel}}{dt} \approx -q \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} (MB), \quad (7.37)$$

где  $s$  — координата вдоль магнитных силовых линий. Очевидно, что в рассматриваемой задаче величина  $q\varphi + MB$  играет роль потенциала. Допустим, кроме того, что движение частицы в магнитном поле можно считать квазистационарным. Тогда в первом приближении  $\varphi$  и  $B$  — функции только координаты  $s$ , а частица движется вдоль поверхности  $rA_{\varphi} = r_0 A_{\varphi 0}$  между магнитными пробками с периодом продольного движения  $t_{\parallel}$ . Умножая уравнение (7.37) на  $u_{\parallel}$  и интегрируя его по времени  $t$ , получим

$$\frac{1}{2} m (u_{\parallel}^2 - u_{\parallel 0}^2) = q(\varphi_0 - \varphi) - M(B - B_0). \quad (7.38)$$

Введем теперь угол  $\theta$  между полной скоростью  $\vec{\omega}_0$  и продольной компонентой  $\vec{u}_{\parallel 0}$  в начальный момент времени.

Из-за небольшой скорости дрейфа  $\vec{u}_{\perp}$  будем считать  $\omega_{0\perp}^2 \approx W_0^2$ , где  $W_0$  — скорость вращения частицы по ларморовской орбите. Для симметричной конфигурации магнитного поля (рис. 6.3) продольная скорость частицы в точках поворота  $s_1 = -s_m$  и  $s_2 = s_m$  равна нулю. Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} m u_{\parallel 0}^2 &= \frac{1}{2} \frac{m W_0^2}{(\operatorname{tg} \theta)^2} = q(\varphi_m - \varphi_0) + \\ &+ \frac{1}{2} m W_0^2 (R_m - 1), \end{aligned} \quad (7.39)$$

где индексы 0 и  $m$  относятся соответственно к начальной точке в экваториальной плоскости и к точкам поворота, изображенным на рис. 6.3. Введем пробочное отношение  $R_m = B_m/B_0$  согласно формуле (6.20). Для того чтобы частицы отражались в точках поворота, пробочное отношение должно быть равно

$$R_m = (\sin \theta)^{-2} + \frac{2q(\varphi_0 - \varphi_m)}{m W_0^2}. \quad (7.40)$$

Таким образом, из развитой в настоящем параграфе приближенной теории следует, что в отсутствие электрического поля при помощи магнитных пробки будут захвачены все частицы внутри конуса  $(\sin \theta)^2 > 1/R_m$ . Остальные же частицы, находящиеся вне этого конуса  $(\sin \theta)^2 < 1/R_m$ , уйдут из магнитной ловушки. При этом угол  $\theta_m = \arcsin (1/R)^{1/2}$  определяет в пространстве скоростей конус потерь с осью, направленной вдоль продольной компоненты скорости  $w_s$  (рис. 7.4). При помощи строгой теории, развитой в работах [129, 130], в последнее время показано, что частицы, находящиеся вне этих конусов потерь, удерживаются в ловушке неограниченно долго, если только магнитное поле достаточно велико.



Рис. 7.4. Конус потерь в пространстве скоростей для ловушки с магнитными пробками.

При наличии электрического поля пробочное отношение, соответствующее отражению частиц, уже не пропорционально  $(\sin \theta)^{-2}$ . Таким образом, появление потенциала  $\phi$  в уравнении (7.40) приводит к зависимости конусов потерь от  $\sin \theta$ . При  $q(\phi_0 - \phi_m) > 0$  электростатические силы выталкивают частицу через пробки из области магнитной ловушки, и для существо-

вания точки отражения скорости  $\vec{u}_{\parallel}$  требуется бóльшая величина пробочного отношения  $R_m$ . Электрические силы могут возникнуть из-за амбиполярного эффекта, который рассмотрен в разделе 4.4.

Далее, из уравнения (7.38) следует, что даже если разность потенциалов вдоль магнитной силовой линии  $\phi - \phi_0$  приблизительно равна величине  $-\frac{mW_0^2}{2q}(R-1)$ ,

то частицы все еще удерживаются магнитными пробками. При этом если пробочное отношение  $R = B/B_0$  значительно больше единицы, а скорости  $u_{\parallel 0}$  и  $W_0$  равны по порядку величины, то  $q(\phi_0 - \phi)$  может стать значительно больше поперечной энергии такой частицы. Этот результат, впервые полученный Альфвеном и Фельтхам-

мером [22], справедлив по крайней мере до тех пор, пока выполняются условия применимости теории возмущений (3.1) и (3.2).

Кроме того, он согласуется также со вторым выражением в формуле (3.34), так как слагаемое в уравнении (7.37), пропорциональное градиенту магнитного поля, является величиной первого порядка по  $\epsilon$  в соответствии с § 1.3 гл. 3.

Заметим, что если  $q(\varphi_0 - \varphi) > 0$ , то продольное электрическое поле вызывает перемещение частицы в область более сильного магнитного поля при условии, что магнитные силовые линии направлены так, как это показано на рис. 6.3. Возникающее при этом увеличение энергии ларморовского вращения частицы от  $\frac{1}{2} m W_0^2$  до величины  $\frac{1}{2} m W^2$  можно рассматривать как результат поперечного магнитного сжатия. При этом увеличение поперечной энергии частицы происходит как из-за уменьшения продольной скорости  $\vec{u}_{\parallel}$ , так и из-за ускорения частицы в продольном электрическом поле  $\vec{E}_{\parallel}$ .

Полоидальное поле, используемое в ловушках с магнитными пробками, имеет то преимущество, что движение частиц со скоростью поперечного дрейфа  $\vec{u}_{\perp}$ , определяемое выражением (3.32), происходит по замкнутым траекториям в направлении  $\varphi$ . Поэтому в состоянии равновесия поперечный дрейф частиц не приводит к разделению зарядов.

Имеется по крайней мере один космический пример, иллюстрирующий удержание частиц в ловушке с магнитными пробками, когда конфигурация почти симметрична — это открытые недавно [9] радиационные пояса, состоящие из заряженных частиц, захваченных земным магнитным полем (рис. 7.5).

Важным преимуществом показанной конфигурации является большая величина пробочного отношения. В принципе потери частиц, связанные с наличием концов у магнитных ловушек подобной геометрии, можно уменьшить. Такая усовершенствованная ловушка приведена на рис. 7.6, где для удержания используется полоидальное поле  $\vec{B}_p$  кольцевого витка, а стабилизация

достигается при помощи сферического витка, окружающего всю систему, и тороидального магнитного поля [120, 121].

Так как основной виток подвешивается на тонких подводящих проводниках, то большинство магнитных силовых линий может свободно проходить между ними. Таким образом, благодаря этому уменьшаются потери частиц, связанные с наличием концов в области магнит-

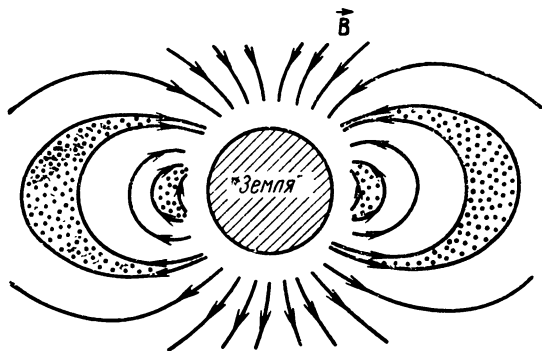


Рис. 75. Схема расположения поясов, состоящих из частиц, захваченных магнитным полем Земли

ных пробок. При помощи системы проводников, приведенных на рис. 7.2, можно получить дополнительное уменьшение потерь частиц. При таком расположении проводников их поверхности экранируются магнитным полем от частиц плазмы (ср. также работу [132]).

Известен другой способ создания конфигурации магнитного поля (рис. 7.6) — при помощи кольца с током: подводящие проводники убирают, чтобы основной виток свободно парил в пространстве. Тогда все магнитные силовые линии замыкаются внутри области удержания. При этом положение витка регулируется специальным приспособлением. Подобное устройство было использовано в «Левитроне» [133, 134], где основной виток удерживался некоторое время в определенной области пространства при помощи индуцированных токов.

В установке «Астрон» [135] кольцевой ток создается слоем электронов с высокой энергией. Вместе с внеш-

ним магнитным полем пробочной конфигурации такой слой приводит к созданию результирующего магнитного поля, силовые линии которого замыкаются внутри области удержания.

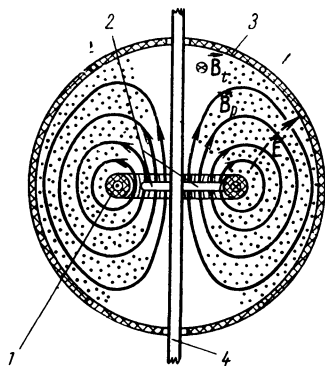


Рис. 7.6. Комбинированная магнитная ловушка, создаваемая наложением поперечного магнитного поля  $\vec{B}_p$  кольцевого тока, протекающего через основной виток, и магнитного поля тока, протекающего через внешний сферический виток. Основной виток удерживается в определенном месте подводными проводниками. Плазма, захваченная в магнитном поле, может быть приведена во вращение вокруг оси симметрии системы при помощи приложенного поперечного электрического поля  $\vec{E}$ . Кроме того, для стабилизации плазмы может быть приложено тороидальное магнитное поле  $\vec{B}_t$ :

1 — основной виток; 2 — подводные проводники и подвешивающее устройство основного витка; 3 — сферический виток; 4 — центральный стержень.

Одна из основных проблем в такой установке это устойчивость электронного слоя. Альфвен [136] предложил создавать кольцевой ток при помощи самой плазмы. При этом основная трудность состоит в необходимости инжектировать нагретую плазму в магнитное поле таким образом, чтобы образовывалось устойчивое кольцо плазмы, которое должно удерживаться в статическом равновесии только под действием собственных полей.

Удержание плазмы в ловушке с магнитными пробками можно улучшить введением центробежной силы. Для этого [50] было предложено привести плазму во вращение так, как это показано в разделе 2.2. При этом [137] вращающуюся плазму легко получить с помощью скрещенных электрического и магнитного полей. Такие условия осуществлены в установке «Иксион» [126]. Установка представляет собой ловушку с магнитными пробками, в которой разряд производится в направлении, перпендикулярном магнитному полю. Точно так же и в установке, приведенной на рис. 7.6, захваченную плазму можно привести во вращение вокруг оси симметрии. Для этого нужно приложить электрическое

поле  $\vec{E}$ , которое будет приводить плазму во вращение вокруг оси симметрии. Для этого нужно приложить электрическое



поле между основным и сферическим витками и центральным стержнем [121].

В работе [124] впервые было показано, что уход частиц вдоль магнитных силовых линий определяется не только пробочным отношением, но и величиной центробежной энергии, изменяющейся в радиальном направлении. Конфигурация магнитного поля, приведенная на рис. 7.6, из-за больших размеров в радиальном направлении особенно удобна для удержания плазмы центробежной силой. В этом нетрудно убедиться, если рассмотреть движение плазмы при помощи гидродинамических уравнений [122].

Поскольку уравнения (7.32) и (2.36) эквивалентны, результат (7.38), полученный из рассмотрения движения отдельных частиц, можно непосредственно применить к вращающейся системе, в которой выражения для модифицированных потенциалов  $\varphi^*$  и  $A^*$  даются формулами (7.28) и (7.29). При этом модифицированный эквивалентный магнитный момент  $M^* = mW_0^{*2}/2B^*$  сохраняется при движении частицы в модифицированном магнитном поле  $\vec{B}^*$ , которое определяется выражением (7.31). Это означает, что явный учет вращения с угловой скоростью  $\Omega$  позволяет получить несколько лучшее приближение к теории возмущений, развитой в гл. 3. В стационарном состоянии соотношение, эквивалентное соотношению (7.38), принимает вид

$$\frac{1}{2} m (u_{\parallel}^{*2} - u_{\parallel 0}^{*2}) = q(\varphi_0 - \varphi) + (\Omega_0 - \Omega) p_{\varphi_0} + q(\Omega r A_{\varphi} - \Omega_0 r_0 A_{\varphi_0}) - \frac{1}{2} m (\Omega_0^2 r_0^2 - \Omega^2 r^2) - M^*(B^* - B_0^*). \quad (7.41)$$

В достаточно сильном магнитном поле  $\Omega \ll \omega_g$  соответствующее выражение для точек поворота при продольном движении можно определить из следующего соотношения:

$$\frac{1}{2} m u_{\parallel}^{*2} \approx \frac{1}{2} m W_0^{*2} (R_m - 1) + \frac{1}{2} m \Omega_0^2 (r_0^2 - r^2). \quad (7.42)$$

Здесь предполагается, что во вращающейся системе отсчета электростатические поля отсутствуют во всех точках магнитной силовой линии, проходящей через  $r_0, z_0$ .

Полученное соотношение показывает, что удержание частиц в ловушке с пробочным отношением  $R_m$  улучшается при наличии дополнительной центробежной силы, которая определяется радиальным отношением  $r_0/r$ .

По сравнению с обычной пробочной конфигурацией магнитного поля конфигурация, изображенная на рис. 7.6, имеет то преимущество, что одновременно с сильными магнитными полями в «экваториальной» плоскости основного витка существуют большие радиальные отношения. Мы можем и дальше усовершенствовать конфигурацию магнитного поля, показанную на рис. 7.6, увеличивая размеры основного витка по отношению к размерам внешнего витка системы (сферический виток). В этом случае область удержания деформируется в узкую тороидальную оболочку с сильным магнитным полем в экваториальной области, где плотность плазмы и центробежная сила максимальны. Это улучшает устойчивость плазмы.

Следует отметить, что в установке типа «Гомополяр» с прямым магнитным полем скорость вращения ограничена величиной  $\left(\frac{2eV_i}{m_i}\right)^{1/2}$ , где  $V_i$  — потенциал ионизации, а  $m_i$  — масса иона [138, 139]. Согласно теории, развитой в работе [140], ограничение скорости происходит в широкой области параметров разряда. Эта теория предполагает, что нейтральная компонента сильно тормозит движение плазмы, если их относительная скорость приближается к указанной выше величине. В установках с вращающейся плазмой такая ситуация возможна при наличии обратного потока нейтральной компоненты. Этот поток образуется из частиц плазмы, которые уходят вдоль магнитных силовых линий на торцовые непроводящие стенки и там рекомбинируют. Если такой механизм ограничивает скорость в стационарном состоянии и если угловая скорость вращения  $\Omega$  не меняется вдоль магнитной силовой линии, то нетрудно убедиться, что экваториальная скорость плазмы может достигать величины, которая превышает указанную предельную скорость и равна  $\frac{r_0}{r_w} \cdot \left(\frac{2eV_i}{m_i}\right)^{1/2}$ . Здесь  $r_0/r_w$  — радиальное отношение, определенное радиусом  $r_w$  торцовых непроводящих стенок (ср. рис. 7.3). Таким образом, в стационарном состоянии большие скорости вра-

щения могут существовать только в установках с большими радиальными отношениями.

Мы рассматривали магнитные ловушки с полями полоидального типа, в которых существуют области с вогнутыми по направлению к основной части плазмы магнитными силовыми линиями. Как будет показано в гл. 8, в некоторых случаях это может привести к неустойчивости и нарушению удержания [141, 142].

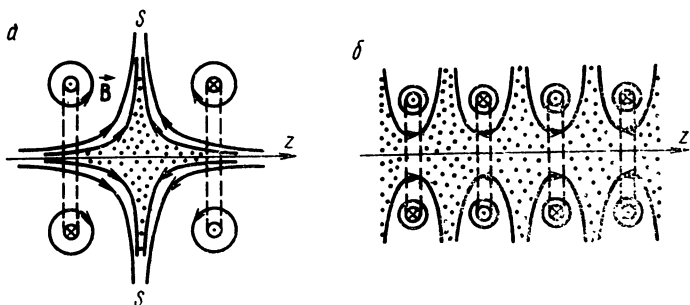


Рис. 7.7. Ловушка с магнитным полем, силовые линии которого выпуклы по направлению к удерживаемой плазме: *а* — остроугольная геометрия магнитного поля; *б* — магнитное поле типа «пикет-ренс»

Для устранения неустойчивости такого типа необходимо создать такое магнитное поле, силовые линии которого выпуклы по направлению к плазме вдоль всей ее границы. В этом случае осуществляется так называемая остроугольная геометрия магнитного поля [143] (рис. 7.7). Объединяя несколько элементов остроугольной геометрии, можно получить конфигурацию «пикет-фенс», показанную на рис. 7.7, б. В такой геометрии уход частиц происходит не только через магнитные пробки, но и через кольцеобразную область  $S$ .

В центре остроугольной конфигурации магнитного поля существует нулевая точка, вблизи которой имеется область слабого магнитного поля. Эта область ухудшает удержание частиц, так как ее действие подобно действию большого рассеивающего центра. При прохождении частиц через эту область нарушается адиабатическая инвариантность движения. Для устранения возникающего при этом ухода частиц в конусы потерь можно создать комбинированную остроугольную кон-

фигурацию магнитного поля, в которой вдоль оси симметрии помещен центральный проводник. При этом ток, протекающий через этот проводник, создает дополнительное тороидальное магнитное поле. Это магнитное поле устраняет упомянутые выше потери частиц, однако в то же время создает внутри области удержания некоторую границу, на которой магнитные силовые линии вогнуты по направлению к плазме.

Как показано в обзоре [106], известны различные методы, при помощи которых можно инжектировать плазму в ловушку с магнитными пробками. Один из них состоит в том, что плазма инжектируется в область удержания через магнитную пробку. В этом случае плазма захватывается ловушкой при достаточно быстром нарастании магнитного поля. При другом способе инжекции источник ионов помещают внутри области удержания, а магнитное поле изменяется во времени достаточно быстро для того, чтобы препятствовать попаданию отраженных частиц обратно на источник. В установках DCX [144] и «Огра» [145], в пространстве между магнитными пробками захватывались ионы с очень высокой энергией, создаваемые из молекулярных ионов в процессе диссоциации. Эти и подобные им методы инжекции можно использовать также в установках с остроугольной геометрией.

### 3.2. Тороидальные поля

В некоторых экспериментах изучается поведение плазмы при пропускании сильных токов в тороидальном магнитном поле. При этом токи в тороидальной камере создаются посредством электромагнитной индукции. Такие разряды исследовались на установке «Зета» [146, 147], а также на других аналогичных установках.

В тороидальном магнитном поле силовые линии могут замыкаться внутри области удержания, так что частицы не уходят из ловушки при движении со скоростью  $\vec{u}_{\parallel}$ . В то же время в разделе 2.1 было показано, что границей запрещенной области для частицы служит цилиндрическая поверхность, параллельная оси симметрии и проходящая через точку, в которой нахо-

дидась частица в начальный момент времени. Этот результат можно применить к отдельной частице, движущейся в вакуумном магнитном поле (рис. 7.8, *a*). Из выражения (3.24) следует, что скорость дрейфа, пропорциональная градиенту магнитного поля, направлена вдоль оси  $z$ . Таким образом, частицы не могут удерживаться в торе конечных размеров только одним тороидальным магнитным полем.

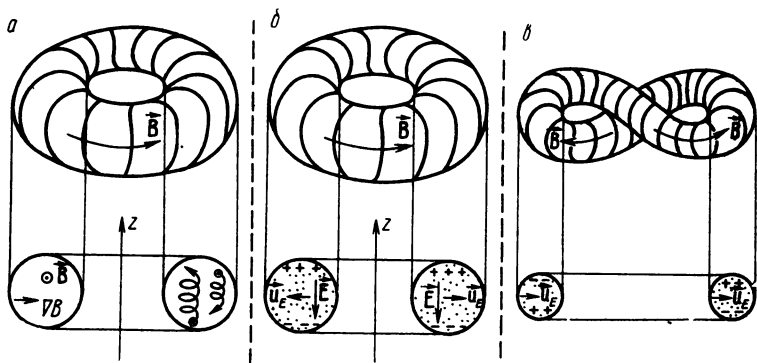


Рис. 7.8. Движение частиц в стеллараторе, приводящее к разделению зарядов:

*a* — движение отдельной частицы в тороидальном магнитном поле; *б* — плазма с низкой плотностью в тороидальном магнитном поле ( $\vec{u}_E$  — скорость электрического дрейфа); *в* — плазма с низкой плотностью в стеллараторе в виде цифры восемь. В этом случае вращательное преобразование приводит к тому, что дрейф частиц под действием электрического поля в среднем компенсируется на длине установки.

Если в тороидальное магнитное поле ввести плазму, то положение меняется. Тогда ионы и электроны плазмы дрейфуют в противоположных направлениях вдоль оси симметрии согласно уравнению (3.24), что приводит к разделению зарядов. Таким образом, в торе конечных размеров возникает электрический потенциал, который меняется вдоль оси  $z$ . В этом случае проведенный анализ (см. раздел 2.1) уже несправедлив, и мы должны пересмотреть возникающую ситуацию на основании дрейфовой теории. Если давление плазмы мало по сравнению с плотностью магнитной энергии, то можно считать, что магнитное поле в торе совпадает с вакуумным магнитным полем, которое создается внешними токами.

Возникающие при этом поля приведены на рис. 7.8, б. При разделении зарядов вдоль оси  $z$  под действием градиента магнитного поля  $\vec{\nabla} B$  возникает электрическое поле  $\vec{E}$ , которое вызывает появление скорости электрического дрейфа  $\vec{u}_E = \vec{E} \times \vec{B} / B^2$ . Следовательно, плазма в целом уходит на стенки в радиальном направлении

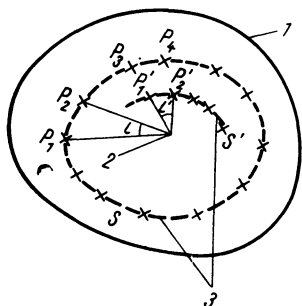


Рис. 7.9. Поперечное сечение камеры стелларатора. В точках  $P_1, P_2, P_3 \dots$  происходит пересечение плоскости данного поперечного сечения с отдельной магнитной силовой линией при последовательных обходах вдоль тора:

1 — стенка камеры; 2 — магнитная ось системы; 3 — магнитные поверхности.

ного поля в отличие от обыкновенного тора. Вместо этого магнитная силовая линия, проходящая через точку  $P_1$  поперечного сечения тороидальной камеры, в результате последовательных обходов вдоль установки пройдет через точки  $P_2, P_3, \dots$  того же поперечного сечения (рис. 7.9).

После одного обхода тора множество точек  $P_1$  преобразуются в множество точек  $P_2$ . Это принято называть «магнитным преобразованием» плоскости поперечного сечения. Особенно интересен случай, когда такое преобразование сводится в основном к вращению, т. е. по крайней мере вся внешняя часть плоскости вращается в одном направлении. При этом существует хотя бы одна точка, которая переходит сама в себя. В торои-

и не удерживается в установке. Для того чтобы устранить перечисленные недостатки и использовать преимущества установок, в которых магнитные силовые линии замыкаются в области удержания, Спитцер [148] предложил использовать вращательное преобразование магнитного поля в установке «Стелларатор». Проще всего такое преобразование магнитного поля можно получить, изгибая рассмотренные тороидальные установки (см. рис. 7.8, а и б) в виде цифры восемь, как это показано на рис. 7.8, в. В результате магнитные силовые линии уже не замыкаются на себя после одного обхода вдоль конфигурации магнит-

дальних ловушках типа «Стелларатор» существует только одна такая точка, которая соответствует так называемой «магнитной оси». Крускал [149] показал, что любая точка, не лежащая на магнитной оси, при последовательных магнитных преобразованиях двигается вблизи одной и той же замкнутой кривой. Поэтому после бесконечного числа обходов тора силовая линия заполнит «магнитную поверхность». Для стелларатора

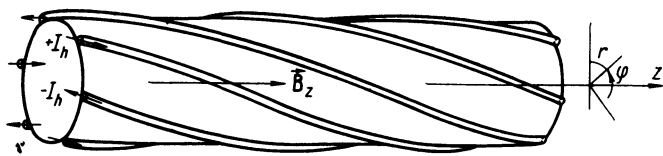


Рис. 7.10. Винтовые обмотки с токами  $+I_h$  и  $-I_h$  создают компоненты поля  $B_r$  и  $B_\varphi$ , которые вместе с аксиальным полем  $B_z$  осуществляют преобразование вращения.

в виде восьмерки все точки поперечного сечения после одного обхода тора повернутся на один и тот же угол. Существует еще один способ, при помощи которого можно создать вращательное преобразование. Для этого по поверхности тороидальной камеры нужно наложить винтовые обмотки. На рис. 7.10 изображена часть тора, причем для простоты радиус кривизны считается равным бесконечности. Текущие в противоположных направлениях токи  $+I_h$  и  $-I_h$  создают поле с компонентами  $B_r$  и  $B_\varphi$ , которое накладывается на поле  $B_z$ . В таком устройстве осуществляется вращательное преобразование, причем для точек  $P_1, P_2$  и  $P'_1, P'_2$  на разных магнитных поверхностях  $S$  и  $S'$  углы поворота  $i$  и  $i'$  различны. Эти случаи подробно описаны в работах Спитцера [150] и Крускала с сотрудниками [151]. Ограничимся лишь кратким рассмотрением полученных результатов. Во-первых, следует отметить, что дрейф заряженной частицы из-за неоднородности магнитного поля и возникающий в результате этого электрический дрейф таковы, что взаимно уничтожают друг друга при полном обходе камеры, как это показано на рис. 7.8, в. Однако частицы со слишком большим (или малым)

отношением  $u_{\parallel}/W$  могут уйти из ловушки еще до окончания такого цикла, так как для таких частиц смещения, связанные с неоднородностью магнитного поля и с разделением зарядов, не компенсируют друг друга. В первом случае частицы двигаются слишком медленно вдоль силовых линий и поэтому успевают достичь стенок за время, меньше периода. Поперечный дрейф при этом определяется величиной  $W^2$  и поперечным градиентом магнитного поля [первый член уравнения (3.24)]. Во втором случае дрейф, вызванный кривизной силовых линий магнитного поля, является преобладающим и приводит к тому, что частицы попадают на стенки еще до окончания периода. Смещение частиц в поперечном направлении при этом пропорционально  $u_{\parallel}^2$  в то время, как смещение вдоль силовых линий пропорционально  $u_{\parallel}$ . Указанные потери можно свести к минимуму в стеллараторе типа восьмерки. Для этого на обоих изогнутых концах восьмерки создается прямое волнистое магнитное поле (скэллопс) с гофрировкой. Для вращательного преобразования существенно, что пространственный заряд, возникший из-за диамагнитного дрейфа, может выравниваться вдоль силовых линий, так как последние не замыкаются на себя, как в обычном торе. Поле, образованное винтовыми обмотками с компонентами  $B_r$  и  $B_{\phi}$ , соответствует геометрии антипробкотрона и прямого гофрированного поля («пикет-фенс») с замкнутыми силовыми линиями (см. рис. 7.7). Суммарное поле стелларатора имеет различный угол прокручивания для магнитных поверхностей, отстоящих на разном расстоянии от магнитной оси. Поэтому точки пересечения силовыми линиями поперечного сечения тора распределены равномерно, т. е. поле имеет «shear»\*. В разделе 2.1 гл. 8 при помощи энергетических соображений будет показано, что система с shear обладает большей устойчивостью. Мы рассматривали только вакуумное поле стелларатора. Если нельзя пренебречь давлением удерживаемой плазмы, то появляются возмущения поля и дрейфового движения частиц, связанные с наличием плазмы. Это изменяет угол прокручивания вращательного преобразования, который может теперь умень-

---

\* shear — ножницы (англ.).



шиться или стать кратным  $2\pi$ . Возможно, что выравнивание пространственных зарядов, а следовательно, и стабилизация вращательным преобразованием прекратятся при некоторой критической величине продольного тока в плазме. Существование такого предела было доказано в работах [149, 151].

Вторая трудность, связанная с вращательным преобразованием состоит в том, что пространственные заряды выравниваются в продольном направлении. Причем масштаб этого разделения зарядов равен или превышает периметр установки. Поэтому уже небольшое отклонение от идеальной проводимости может значительно ослабить продольные токи, а следовательно, и стабилизацию за счет преобразования вращения.

Очевидно, что вращательное преобразование должно существовать при протекании тока в плазме, удерживаемой в обычном торе. Существование такого тока приведет к уменьшению потерь частиц из-за поперечных дрейфов и неустойчивости. Естественно, может возникнуть вопрос, в чем же существенная разница между стелларатором и обычным тороидальным разрядом. Это различие состоит в том, что преобразование вращения с shear присутствует уже в вакуумном поле стелларатора. Поэтому становится возможным стационарное удержание при наличии аксиальных токов и давления плазмы, не равного нулю. Указанное состояние стабильно относительно большой группы неустойчивостей [152].

### ***3. 3. Асимметричные конфигурации***

При рассмотрении винтового поля стелларатора мы уже разбирали задачу об асимметричных возмущениях удерживающего поля. Поперечное дрейфовое движение, возникающее из-за неоднородностей магнитного поля, компенсировалось при полном обходе тора. Подобное явление имеет место в установке, недавно описанной Иоффе [153]. Для стабилизации неустойчивостей пробкотрон окружали проводниками, как это показано на рис. 7.1, а. Проводники располагались вдоль магнитного поля пробкотрона, причем ток в соседних проводниках имел противоположные направления, как и в обмотках установки, изображенной на рис. 7.10. Суммарное поле — наложение поля пробкотрона на прямое гофри-

рованное поле типа «пикет-фенс» (см. рис. 7.7, б). На рис. 7.11 показано сечение установки экваториальной плоскостью. Выбирая параметры установки, можно создавать магнитное поле, нарастающее в радиальном направлении (как в случае антипробкотрона). При этом силовые линии выходят через пробки, не касаясь стенок. В этой установке вращательное преобразование вдоль

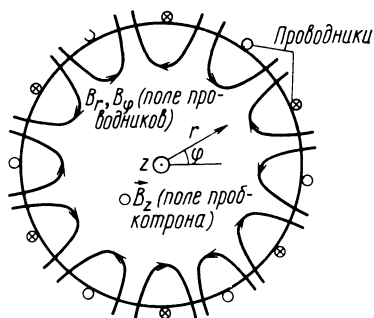


Рис. 7.11. Сечение экваториальной плоскостью пробкотрона с обмотками, расположенными в аксиальном направлении [154].

силовых линий компенсирует дрейфы, возникающие из-за компонент  $V_r$  и  $V_\phi$ . При этом благодаря симметрии конфигурации можно считать, что происходит взаимное уничтожение дрейфов для частиц, которые совершают колебания вверх и вниз вдоль силовых линий, дрейфуя в то же время в направлении  $\phi$ .

Аналогичное явление имеет место при дрейфе частиц в конфигурации, изображенной на рис. 7.6,

когда проводники используются так, как это показано на рис. 7.2. Проводники создают лишь асимметрию регулярного типа. Поэтому можно ожидать, что смещения из-за дрейфов будут взаимно уничтожаться, по крайней мере в первом приближении. В небольшой области около нулевой линии на рис. 7.2 поле мало, поэтому в случае цилиндрической геометрии (см. рис. 7.6) существуют силовые линии, выходящие из области удержания во внешнюю область. Однако это не значит, что частицы уходят из ловушки обязательно здесь, так как пространственные размеры области слабого поля могут быть много меньше ларморовского радиуса частицы в этой области. Все частицы, приходящие в эту область из плазмы, имеют скорость, почти параллельную плоскости рис. 7.2.

Поперечные дрейфы частиц в тороидальных магнитных полях можно компенсировать не только вращательным преобразованием. Такой же дрейф частицы вокруг магнитной оси получается в так называемом гофриро-

ванном торе (сравни с результатами работы [146]. В этом случае напряженность тороидального магнитного поля периодически меняется вдоль оси тора. Возникающий из-за этого диамагнитный дрейф приводит, как и вращательное преобразование, к уменьшению потерь частиц.

Удержание плазмы не обязательно ухудшается даже в конфигурациях, где асимметрия полностью нерегулярна [78] (см. также раздел 1.5 гл. 4). Эффективность такого удержания обусловлена сохранением продольного инварианта  $J$ , который можно ввести и для полей, подобных изображенным на рис. 4.6. В этом случае частицы колеблются между двумя пробками, а напряженность магнитного поля имеет только один минимум на силовой линии между соответствующими точками отражения.

#### **§ 7. 4. МЕХАНИЗМЫ УХОДА ЧАСТИЦ ИЗ ЛОВУШКИ**

Мы исследовали удержание бесстолкновительной плазмы, основываясь на первом приближении дрейфовой теории. В этом параграфе описаны эффекты неадиабатичности и механизмы диссипации, которые могут привести к уходу частиц из ловушки.

##### **4. 1. Эффекты неадиабатичности**

Из-за конечной величины ларморовского радиуса результаты теории возмущений, изложенные в гл. 3 и 4, верны лишь приближенно, так как адиабатические инварианты не являются точными интегралами движения. Конкретные примеры, приведенные на рис. 4.3 и 4.9, показывают, что отклонение инвариантов от постоянной величины могут стать довольно большими, если нарушены условия (3.1) и (3.2). Для изучения границ запрещенных областей в симметричных конфигурациях можно использовать результаты (7.7) и (7.36) даже если основные предположения теории возмущений не выполняются. Труднее вычислить уход через пробки тех частиц, которые не вращаются вокруг оси симметрии. Однако проведенные недавно исследования [130] показали, что в достаточно сильном магнитном поле частицы вне конуса потерь удерживаются неограниченно долго

Для определения потерь частиц из-за несохранения адиабатического инварианта используются численные расчеты. Такие расчеты проведены для пробкотрона и дали следующие результаты [79]:

1. Найдено, что для ларморовских радиусов, представляющих практический интерес, изменения эквивалентного магнитного момента  $M$  за один период движения между магнитными пробками довольно велики.

2. Изменения  $M$  почти периодичны, а разница величин между последовательными отражениями мала. Установлено, что эффект сближения траекторий частиц при колебаниях в пробкотроне очень мал для траекторий, пересекающих экваториальную плоскость ловушки в точках, которые можно соединить плавной кривой. Частицы,двигающиеся по другим орбитам, уходят из ловушки.

3. Относительные изменения  $M$  ведут себя как  $\exp(-\text{const } \omega_g s_m / \omega)$ , где  $\omega_g$  — циклотронная частота;  $2s_m$  — расстояние между пробками и  $\omega$  — скорость частицы. Это согласуется с теоретическими результатами [46, 62] (см. также раздел 2.3 гл. 4).

4. Вводя асимметрию магнитного поля, удалось изучить влияние возмущений магнитного поля ловушки на удержание плазмы. Оказалось, что в некоторых случаях может увеличиться уход частиц через пробки.

Потери из-за неадиабатичности в антипробкотроне изучены в работе [154]. Исследование показало, что существует три типа траекторий: а) адиабатические орбиты, сохраняющиеся сколь угодно долго; б) неадиабатические траектории, которые испытывают наиболее сильные изменения; в) промежуточный тип, когда изменения относительно невелики и не связаны между собой.

Потери из магнитной ловушки теоретически исследовались в работе [86]. Было показано, что частицы уходят из ловушки из-за резонансных эффектов, возникающих между продольными колебаниями и ларморовским вращением частиц, которые захвачены между двумя магнитными пробками. Эти результаты согласуются с экспериментом [155].

Недавно опубликованы новые результаты по удержанию заряженных частиц в асимметричной геометрии [156]. Две пробки были слегка смещены от симметричных положений для того, чтобы образовать секцию

гофрированного тора. Эксперименты по захвату позитронов, инжектируемых в это поле радиоактивным источником, показали, что позитроны удерживаются в течение многих секунд.

#### 4. 2. Диффузия в координатном пространстве

При столкновении различных заряженных частиц их ведущие центры смещаются. Это приводит к диффузии поперек магнитного поля. Рассмотрим столкновения двух частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$ , зарядами  $q_1$  и  $q_2$  и скоростями  $\vec{\omega}_1$  и  $\vec{\omega}_2$ . Ларморовские радиусы частиц задаются векторами  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$ , направленными из соответствующих ведущих центров к точкам, где находятся частицы. Обозначим соответствующие величины после столкновения теми же буквами со штрихами. До столкновения вектор, соединяющий центр масс (СМ) ведущих центров с точкой столкновения, определяется формулой

$$\vec{a}_{CM} = (m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2) / m_1 + m_2 = \vec{B}_0 \times \left( \frac{m_1^2}{q_1} \vec{\omega}_1 + \frac{m_2^2}{q_2} \vec{\omega}_2 \right) / (m_1 + m_2) \vec{B}_0^2, \quad (7.43)$$

где считается, что магнитное поле однородно и дрейфовая скорость  $\vec{u}$  много меньше скорости вращения  $\vec{\omega}$ . Из закона сохранения импульсов следует

$$m_1 \vec{\omega}_1 + m_2 \vec{\omega}_2 = m_1 \vec{\omega}'_1 + m_2 \vec{\omega}'_2. \quad (7.44)$$

Поэтому смещение центра масс можно записать в виде

$$\vec{a}'_{CM} - \vec{a}_{CM} = m_1 \vec{B}_0 \times (\vec{\omega}'_1 - \vec{\omega}_1) \left( \frac{m_1}{q_1} - \frac{m_2}{q_2} \right) / (m_1 + m_2) \vec{B}_0^2. \quad (7.45)$$

Следовательно, центр масс будет смещаться только для частиц с различным отношением  $m/q$ .

Рассмотрим теперь ансамбль одинаковых частиц с массой  $m$ , зарядом  $q$ , распределенный с постоянной

плотностью  $n$  в неоднородном магнитном поле  $B$ . В первом приближении положение центра масс ведущих центров определяется суммированием по всем частицам в элементе объема (сравни с данными работы [13])

$$\langle \vec{C} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{\nu} (\vec{p}_{\nu} - \vec{a}_{\nu}) = \frac{1}{n} \sum_{\nu} \left( \vec{p}_{\nu} + m \vec{W}_{\nu} \times \right. \\ \left. \times \frac{\vec{B}}{qB^2} \right), \quad (7.46)$$

где  $\vec{W}_{\nu}$  — скорость вращения. Определим скорость изменения  $\langle \vec{C} \rangle$  во времени

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{C} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{\nu} \left[ \vec{w}_{\nu} + n \frac{d\vec{W}_{\nu}}{dt} \times \frac{\vec{B}}{qB^2} + \right. \\ \left. + m \vec{W}_{\nu} \times \frac{d}{dt} \cdot \frac{\vec{B}}{qB^2} \right]. \quad (7.47)$$

В отсутствие электрических полей, если  $f_{\mu\nu}$  — сила, соответствующая столкновениям между  $\mu$ -й и  $\nu$ -й частицами, уравнение движения  $\nu$ -й частицы примет вид

$$m \frac{d}{dt} (\vec{u}_{\nu} + \vec{W}_{\nu}) = q \vec{w}_{\nu} \times \vec{B} + \sum_{\mu} f_{\mu\nu}. \quad (7.48)$$

Подставляя величину  $d\vec{W}_{\nu}/dt$  из уравнения (7.48) в выражение (7.47), окончательно получим

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{C} \rangle = \frac{m}{n} \sum_{\nu} \left[ \vec{W}_{\nu} \times \frac{d}{dt} \frac{\vec{B}}{qB^2} - \frac{d\vec{u}_{\nu}}{dt} \times \frac{\vec{B}}{qB^2} + \right. \\ \left. + \frac{w_{\nu\parallel}}{m} \right] + \frac{1}{n} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \left( f_{\mu\nu} + \frac{\vec{B}}{qB^2} \right). \quad (7.49)$$

Согласно третьему закону Ньютона, величина  $\sum_{\mu} \sum_{\nu} f_{\mu\nu}$  должна обратиться в нуль, так как силы взаимодействия, возникающие при столкновениях, являются внут-

ренными для системы частиц. Поэтому для однородного магнитного поля  $(d\langle\vec{C}\rangle/dt)_\perp$  равно нулю согласно формуле (7.45) при  $m_1q_1/=m_2/q_2$ .

В неоднородном магнитном поле возникает магнитный дрейф (3.44). Ему соответствуют два первых члена в квадратных скобках выражения (7.49). Последний член правой части уравнения (7.49) также отличен от нуля и по порядку величины равен отношению среднего расстояния между частицами во время столкновения  $d_c$  к характерному масштабу изменения магнитного поля  $L_{св}$ . Таким образом, из-за совместного действия столкновений и градиента магнитного поля должно возникнуть смещение центра масс.

Простое исследование выражения (7.45) показывает, что в однородном магнитном поле под влиянием столкновений центр масс ведущих центров не смещается в поперечном направлении. Однако следует осторожно применять этот результат к оценке величины диффузии одинаковых частиц поперек однородного магнитного поля, так как скорость дрейфа центра масс ведущих центров вообще не равна скорости смещения частиц плазмы. Процесс диффузии частиц поперек магнитного поля можно изучать также при помощи уравнения Больцмана. Соответствующий анализ [157] показал, что в первом приближении поток, обусловленный столкновениями одинаковых частиц, равен нулю.

Во втором приближении [158] столкновения частиц приводят к слабой диффузии, обусловленной производными плотности по координате более высокого порядка.

Скорость диффузии поперек магнитного поля для неодинаковых частиц уменьшается с увеличением напряженности магнитного поля. Это следует из макроскопической теории диффузии, а также из формулы (7.45). Таким образом, до тех пор пока отсутствуют мелко-масштабные или крупномасштабные неустойчивости, потери частиц из-за ухода поперек сильного магнитного поля малы.

Наличие нейтрального газа вызывает дополнительные потери из-за столкновений. Упругие столкновения между заряженными и нейтральными частицами увеличивают скорость поперечной диффузии плазмы. Кроме того, нейтралы могут обмениваться зарядом с ионами.

Подобные столкновения приводят к потере плазмой горячих частиц. Все эти процессы были подробно исследованы на установке DCX [144].

#### 4. 3. Диффузия в пространстве скоростей

Известно, что частицы теряются не только из-за диффузии в координатном пространстве, но также и за счет диффузии в пространстве скоростей (конус потерь в пробкотроне). Из-за большой величины радиуса взаимодействия кулоновские столкновения нельзя рассматривать как столкновения между твердыми сферами. Напротив, диффузия в основном определяется совокупным воздействием далеких столкновений. Мы увидим, что в случае диффузии в конус потерь столкновения между одинаковыми частицами приводят к эффектам первого порядка. В этом смысле аналогия с исчезновением диффузии при столкновениях подобных частиц в координатном пространстве отсутствует. Детальное исследование этой проблемы было проведено в работах [13, 159]. Здесь же рассмотрим лишь часть основных результатов. Пусть «пробная частица» с массой  $m$  и зарядом  $Ze$ , двигаясь со скоростью  $\vec{\omega}$ , сталкивается с полевыми частицами, масса каждой из которых равна  $m_1$ , а заряд  $Z_1e$ .

Для близких столкновений следует рассматривать только взаимодействие между парой частиц. Наименьшее расстояние между ними, так называемый прицельный параметр или параметр соударения, равен  $e^2ZZ_1/4\pi\epsilon_0m\omega^2$  при угловом отклонении  $90^\circ$ . Введем сферу с радиусом, равным параметру соударения, а также среднюю длину свободного пробега. Если  $n_1$  — плотность полевых частиц, то время

$$t_{c_1} = 8\pi\epsilon_0^2 m^2 \omega^3 / e^4 n_1 Z^2 Z_1^2 \quad (7.50)$$

может служить для оценки времени между столкновениями для близких соударений. Для далеких столкновений следует учитывать дальнедействующий характер кулоновских сил. При этом необходимо помнить об эффекте многих малых отклонений, которые происходят одновременно. Определим время  $t_0$ , за которое направление скорости меняется на  $90^\circ$ ,



$$t_D = \frac{\omega^2}{\langle (\Delta\omega_t)^2 \rangle}, \quad (7.51)$$

где  $\Delta\omega_t$  — изменение скорости в направлении, перпендикулярном первоначальному, а величина, стоящая в знаменателе, равна увеличению дисперсии скорости в секунду за счет соударений. Если  $l_1 = (m_1/2kT_1)^{1/2}$ , а  $T_1$  — температура газа полевых частиц, то

$$t_D = 2\pi\epsilon_0^2 m^2 \omega^3 / \epsilon^4 n_1 Z^2 Z_1^2 \ln \Lambda_D \cdot \psi(l_1\omega), \quad (7.52)$$

где

$$\Lambda_D = (12\pi^2 e^3 Z Z_1) \cdot (k^3 T^3 \epsilon_0^3 / n_e)^{1/2}; \quad (7.53)$$

$n_e$  — плотность электронов, а

$$\psi(l_1\omega) = \psi_D - \frac{[\Psi_D - l_1\omega d\Psi_D/d(l_1\omega)]}{2(l_1\omega)^2}, \quad (7.54)$$

$$\psi_D(l_1\omega) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^{l_1\omega} e^{-y^2} dy. \quad (7.55)$$

Как  $\ln \Lambda_D$ , так и  $\psi(l_1\omega)$  слабо зависят от своих аргументов, причем в некоторых интересных случаях величина первого около 20, а второго — порядка единицы.

Результаты (7.52) — (7.55) получены в предположении, что максимальный параметр соударения равен дебаевскому радиусу  $(\epsilon_0 k T e / e^2 n_e)^{1/2}$ . В более строгой теории [160] сила трения, действующая на пробную частицу, определяется без такого ограничения на параметр соударения. Как и в более ранних работах [161], в этой теории учитывается сила трения, возникающая благодаря излучению плазменных волн.

Полученные результаты можно использовать при вычислении скорости диффузии в конус потерь. Когда пробочное отношение и угол  $\theta_m$  малы, вероятность того, что частица попадает в конус потерь (см. рис. 7.4) при большом угле рассеяния, определяется формулой (7.40), в которой электрическое поле следует положить равным нулю

$$P_{cl} = 1 - \cos \theta_m \approx \frac{1}{2} \sin^2 \theta_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_0}{B_m}. \quad (7.56)$$

Для столкновений с большим параметром соударения соответствующая вероятность, согласно работе [162], определяется выражением

$$P_D = \frac{1}{1 + \ln(B_m/B_0)}. \quad (7.57)$$

Следует отметить, что вероятность  $P_D$  слабо зависит от пробочного отношения, что является следствием совокупного действия многих столкновений с большим параметром соударения.

Скорость распада плазмы из-за диффузии в конус потерь определяется выражением [18]:

$$\frac{dn}{dt} = -n_1 \left( \frac{P_{cl}}{t_{cl}} + \frac{P_D}{t_D} \right). \quad (7.58)$$

Если воспользоваться выражениями (7.50)–(7.57) и проинтегрировать их по времени, то получим

$$n(t) = n_0 \tau_m / (t + \tau_w), \quad (7.59)$$

где

$$\tau_m = \frac{8\pi\epsilon_0^2 n_0 m^2 \omega^2}{l^4 n_1^2 z^2 z_1^2} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{B_0}{B_m} + \frac{4 \ln \Delta \psi(l_1 \omega)}{1 + \ln \frac{B_m}{B_0}} \right] \quad (7.60)$$

есть соответствующее время распада (или рассеяния), а  $n_0$  — начальная плотность. Для практически интересных значений величин второй член в квадратных скобках много больше первого и равен примерно 100. Поэтому время рассеяния  $\tau_w$  определяется главным образом столкновениями с большим параметром соударения и слабо зависит от пробочного отношения  $B_m/B_0$ . К сожалению, это ограничивает возможности уменьшения потерь частиц через пробки. Укажем в качестве примера, что дейтериевая плазма плотности  $n = 10^{20} \text{ м}^{-3}$  при температуре  $T = 10^5 \text{ К}$  уходит из ловушки через конус потерь за время порядка  $\tau_w = 10^{-7} \text{ сек}$ . Если повысить

температуру до  $10^{90}$  К, то время ухода станет равным 0,5 сек. В последнем случае энергия, полученная за счет термоядерной реакции в тритий-дейтериевой плазме примерно в четыре раза больше, чем уменьшение энергии из-за ухода частиц в конус потерь.

#### 4. 4. Амбиполярные эффекты

Скорость диффузии ионов и электронов различна как в обычном пространстве, так и в пространстве скоростей. Это различие приводит к образованию пространственного заряда и амбиполярного электрического поля, которое в свою очередь влияет на скорость ухода частиц. Подробное решение этой задачи приведено в работе [163].

В частности, если температура электронов  $T_e$  много меньше температуры ионов  $T_i$ , так что  $m_e^2 \omega_e^3 \ll \ll m_i^2 \omega_i^3$ , то время рассеяния (7.60) электронов в конус потерь много меньше, чем соответствующее время для ионов. Центральная часть плазмы окажется при этом положительно заряженной. Пробочное отношение  $R_m$  для частиц на границе конуса потерь определяется уравнением (7.40). В рассматриваемом случае разность  $\varphi_0 - \varphi_m > 0$  и по порядку величины равна  $kT_e/e$ . Далее, для ионов  $m_i \omega_0^2 = 2kT_i$ , а  $\sin^2 \theta \sim 1$ . Определим эффективное пробочное отношение для ионов при  $\varphi_0 = \varphi_m$  и  $\theta \sim 1$

$$R_{\text{эфф}} \approx \frac{R_m}{1 + \frac{c_1 T_e}{T_i}}, \quad (7.61)$$

где  $c_1$  — постоянная величина порядка единицы. Таким образом, эффективное пробочное отношение уменьшилось, а потери ионов увеличились из-за амбиполярного поля, которое стремится вытянуть ионы через пробки.

#### 4. 5. Неустойчивости

Кроме описанных механизмов потерь в плазме могут возникнуть коллективные движения, что иногда приводит к дополнительному уходу частиц из ловушки. Иными словами, отклонения от состояния равновесия,

раз возникнув, будут увеличиваться, и частицы, двигаясь во внешних полях и взаимодействуя между собой, будут уходить из области удержания. Неустойчивости могут носить более или менее регулярный характер и существуют как в координатном пространстве, так и в пространстве скоростей.

Эти явления изучали многие авторы. В гл. 8 мы рассмотрим лишь один вид неустойчивости с целью проиллюстрировать картину движения отдельных частиц.

# УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ

В этой главе приведем несколько примеров устойчивых и неустойчивых конфигураций, обращая внимание главным образом на движение отдельных частиц.

Известны два класса неустойчивостей: магнитогидродинамические (или макронеустойчивости) и микро-неустойчивости. Рассмотрим лишь одну магнитогидродинамическую неустойчивость, а именно так называемую желобковую неустойчивость. Допустим, что частицы плазмы имеют максвелловское распределение по скоростям, а для описания движения частиц в пространстве используем уравнения магнитной гидродинамики. Таким образом, движение в пространстве скоростей и его связь с микро-неустойчивостями во внимание не принимают. Кроме того, будем считать плазму настолько разреженной, что можно исключить эффекты электромагнитной индукции, приводящие к неустойчивостям типа «шеек» и «змеек».

Нелинейная теория устойчивости находится еще в зачаточном состоянии. Здесь будет изложена только линейная теория. Эффекты нелинейности, описывающие явления, происходящие при конечной амплитуде возмущения, не учитывают. Это следует иметь в виду, так как эффекты нелинейности существенно ограничивают применение линейной теории к реальным физическим задачам.

### § 8. 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Устойчивость системы, находящейся в положении равновесия, можно изучать двумя способами.

1. Разложить возмущение на элементарные моды и следить за поведением последних во времени.

2. Произвести виртуальное смещение системы из положения равновесия и рассмотреть изменение потенциальной энергии.

Преимущество первого метода, часто называемого методом нормальных колебаний [164], состоит в его относительной простоте, а также в том, что динамические эффекты учитываются непосредственно. Он особенно удобен для линеаризованных задач, в которых изучается скорость роста малых отклонений от положения равновесия. Неустойчивости системы в этом приближении соответствует неограниченный рост амплитуды возмущения во времени. Недостаток этого метода состоит в том, что он неприменим для изучения нелинейных эффектов, т. е. возмущений с большими амплитудами. Поэтому выводы линейной теории относительно устойчивости системы следует применять с осторожностью. Существует целый класс систем, неустойчивых в линейном приближении, которые при учете нелинейных эффектов становятся практически устойчивыми. К сожалению, возможны также и обратные случаи.

Второй метод, часто называемый энергетическим принципом, раньше применяли к общим физическим проблемам, а в магнитную гидродинамику его впервые ввел Лундквист [165], а позднее развили Бернштейн и др. [142]. Этот метод позволяет рассматривать системы с очень сложной геометрией, не органичиваясь малыми возмущениями. Преимущество подхода заключается в том, что для определения устойчивости системы достаточно определить и установить, существуют ли какие-нибудь возмущения, уменьшающие потенциальную энергию. Скорость роста возмущений и собственные частоты при этом точно не определяются. Очевидно, что система устойчива, если в равновесии она имеет минимальную энергию. В то же время, если даже и существует состояние с более низкой потенциальной энергией, то это означает, что система обязательно перейдет в это состояние. Переход между состояниями и скорость перехода определяются уравнениями движения. Эти же уравнения используются и при строгом рассмотрении, основанном на энергетическом принципе.

Наконец, энергетический принцип можно распространить на случай, когда энергия подводится к системе от внешних источников.

## § 8. 2. ЖЕЛОБКОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Изучим устойчивость плазмы с низким давлением, помещенной в сильное магнитное поле, которое приближенно можно считать равным вакуумному (т. е. полю без плазмы). Любое возмущение удерживающего поля увеличивает энергию поля на величину много большую, чем рассматриваемые изменения тепловой энергии плазмы. Сначала может показаться, что плазма должна эффективно удерживаться полем, если последнее имеет соответствующую равновесную конфигурацию. Однако внутри плазмы могут возникнуть электрические поля, в результате чего появятся дополнительные дрейфовые движения, и плазма начнет двигаться поперек магнитного поля, оставляя его неизменным. Подобное явление принято называть желобковой неустойчивостью.

Исходя из одножидкостной модели Крускал и Шварцшильд показали, что плазма, удерживаемая магнитным полем в поле силы тяжести, неустойчива [166].

Этот результат связан с неустойчивостью Релея—Тэйлора в обычной гидродинамике. Дальнейшее изучение этого вопроса подтвердило, что замена части плазмы удерживающим магнитным полем в некоторых конфигурациях приводит к неустойчивости [167]. Впервые подробные исследования этого явления, основанные на решении кинетического уравнения, были проведены в работе [168].

Эта же задача анализировалась Берковицем и другими при помощи гидродинамической модели плазмы [141]. Изучим происхождение желобковой неустойчивости и те эффекты, к которым она может привести.

### 2. 1. Физическая картина механизма неустойчивости

Рассмотрим однородную плазму малой плотности  $n$  в поле силы тяжести  $\vec{g}$ , удерживаемую сильным однородным магнитным полем  $\vec{B}$  (рис. 8.1). Предположим, что в состоянии равновесия плазма имеет резкую границу, совпадающую с плоскостью  $y=0$ , перпендикулярную  $\vec{g}$ . Нижняя полуплоскость — область вакуума. На-

водимое токами плазмы магнитное поле должно быть много меньше внешнего поля  $\vec{B}$ .

Пусть граница сместилась, как это показано на рис. 8.1, в плоскости, перпендикулярной  $\vec{B}$ , и имеет форму синусоиды. Можно считать, что жидкость (плазма), занимавшая ранее объем  $V$ , теперь имеет объем  $V' = V$  (на рисунке эти объемы заштрихованы). Каждый

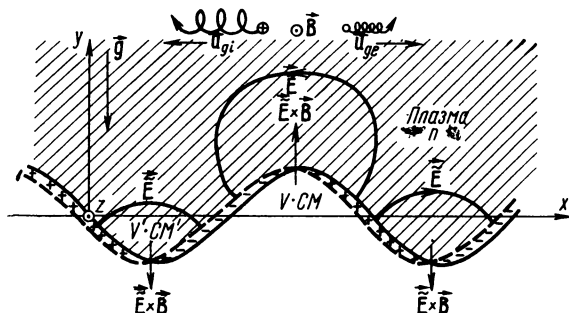


Рис. 8.1. Плазма, удерживаемая магнитным полем  $\vec{B}$ . Разделение зарядов происходит на резкой границе плазма — вакуум и приводит к появлению дрейфа в электрическом поле.

из них составляет полволны синусоиды и неограниченно простирается в направлении оси  $z$ . Так как они равны, то изменение суммарного магнитного потока равно нулю. При переходе плазмы из объема  $V$  в объем  $V'$  положение центра масс  $CM$  понижается и переходит в точку  $CM'$ . То же происходит со всеми парами элементов объема  $V$  и  $V'$  вдоль границы. Следовательно, при таком смещении уменьшается потенциальная энергия.

Если бы сила тяжести имела противоположное направление, то потенциальная энергия увеличилась. В этом случае система была бы устойчивой относительно всех возможных возмущений.

Когда же сила тяжести направлена как показано на рис. 8.1, потенциальная энергия уменьшается при возмущении, возмущение нарастает во времени. Однако приведенные простые аргументы не являются строгим



доказательством, так как необходимо еще показать, что частицы плазмы могут двигаться таким образом, чтобы система перешла в состояние с меньшей энергией. Это осуществляется для типа колебания, приведенного на рис. 8.1, но не всегда справедливо для случая, изображенного на рис. 8.5, а. Для получения дальнейшей информации рассмотрим движение частиц на границе плазма — вакуум. Дрейф в поле внешних сил из уравнения (3.23)  $\vec{u}_{gi} = m_i \vec{g} \times \frac{\vec{B}}{eB^2}$  для ионов и  $\vec{u}_{ge} = -m_e \vec{g} \vec{B} / eB^2$

для электронов. Ионы и электроны дрейфуют в противоположных направлениях, что приводит к разделению зарядов на возмущенной границе плазмы. Возникшее электрическое поле  $\vec{E}$  вызывает дополнительный дрейф  $\vec{E} \times \vec{B} / B^2$ , что увеличивает возмущение границы. Возросшая амплитуда возмущения приводит к увеличению разделения зарядов из-за возросшей скорости горизонтальных дрейфов  $u_{gi}$  и  $u_{ge}$ . Таким образом можно объяснить движение плазмы поперек магнитного поля на границе плазма — вакуум. Магнитное поле при этом не возмущается.

В результате плазма может перейти в состояние с более низкой энергией, следовательно, исходное равновесие неустойчиво. Однако при более детальном анализе, который будет проведен в последующих разделах, можно убедиться, что существуют эффекты, стабилизирующие при определенных условиях желобковые возмущения.

Согласно дрейфовой теории поле гравитации не является единственной причиной разделения зарядов на границе плазмы. Силы инерции, возникающие при ускорении плазмы как целого, могут также привести к разделению зарядов. Наибольший интерес для эксперимента представляет дрейф из-за неоднородности удерживающего магнитного поля.

В качестве примера рассмотрим цилиндрический слой плазмы, удерживаемой в поле прямой бесконечной нити с током (рис. 8.2). Предположим, что внешняя граница деформируется так, что в низшем порядке теории возмущения полный магнитный поток не меняется. Это условие необходимо для существования желобковых возмущений, которые почти не меняют магнитное поле.

Поэтому магнитные потоки в элементах объема  $V$  и  $V'$  (рис. 8.2) должны быть примерно равны,  $\langle B \rangle S = \langle B' \rangle S' = \Phi$ , где  $\langle B \rangle$  и  $\langle B' \rangle$  — средние значения напряженности внутри элементов объема, а  $S$  и  $S'$  — соответствующие поперечные сечения. Изменение объема плазмы при переходе ее из  $V$  в  $V'$  определяется поэтому разностью величин  $2\pi r/B$  и  $2\pi r'/\langle B' \rangle$ . Для внешней границы рассматриваемой конфигурации вели-

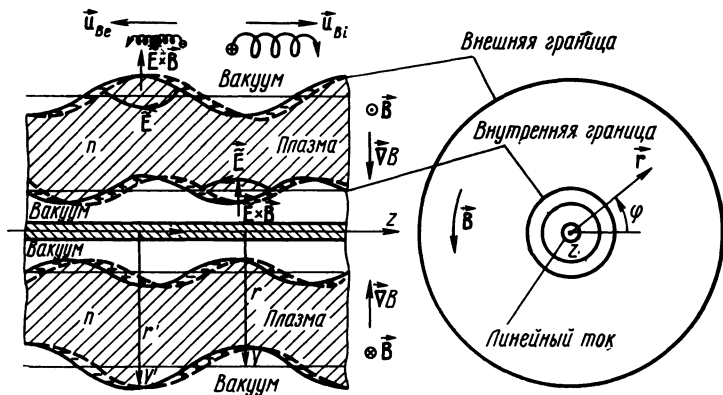


Рис. 8.2. Цилиндрический слой плазмы, удерживаемый полем прямой бесконечной нити с током.

чина  $r/B$  увеличивается с  $r$  и объем  $V'$  больше  $V$ . Отсюда следует, что плазма может расширяться, заметно не меняя магнитного поля, переходя при этом в состояние с меньшей потенциальной энергией. Для внутренней границы получается противоположный результат, следовательно, внутренняя граница устойчива, а внешняя — неустойчива. Развивающаяся неустойчивость относится к типу желобковых или перестановочных неустойчивостей, при которых вещество переходит из объема  $V$  в объем  $V'$ .

После перехода части плазмы из элемента объема  $V$  в объем  $V'$  должны произойти соответствующие изменения баланса давлений и напряженности магнитного поля. Однако, поскольку давление плазмы много меньше величины  $H^2/8\pi$ , изменение магнитного поля слабо влияет на полный магнитный поток  $\Phi$  и площади  $S$  и  $S'$ .

Следовательно, точный учет баланса давлений в этом приближении не влияет на изменение потенциальной энергии при возмущениях. Для более сложной конфигурации магнитного поля пробочной геометрии (рис. 8.3) получим условие устойчивости

$$\delta V = V' - V = \Phi \delta \int \frac{ds}{B} < 0, \quad (8.1)$$

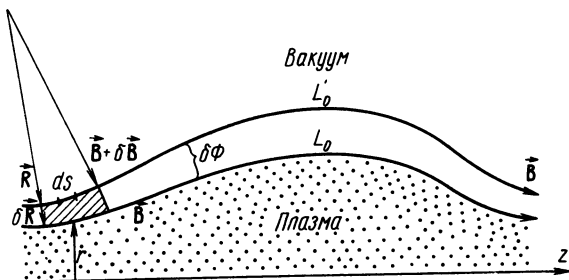


Рис. 8.3. Связь между напряженностью и радиусом кривизны магнитного поля.

где интеграл берется вдоль силовой линии, расположенной на границе, магнитные потоки  $\Phi$ , пронизывающие объемы  $V$  и  $V'$ , одинаковы,  $s$  — координата вдоль магнитного поля. Так как  $\text{rot } \vec{B} \approx 0$ , то интеграл, взятый по контуру, ограничивающему заштрихованную площадь (рис. 8.3), должен быть равен нулю, т. е.  $\delta R/R = \delta B/B$ , где  $R$  — радиус кривизны силовой линии. Заметим также, что магнитный поток  $\delta \Phi = 2\pi r B \delta R$  между двумя линиями  $L_0$  и  $L'_0$  не меняется в направлении силовой линии. Используя эти соотношения, условие (8.1) можно переписать в виде [169]

$$\int \frac{ds}{r B^2 R}. \quad (8.2)$$

Следует отметить, что на торцах ловушки, изображенной на рис. 8.3,  $R > 0$ , а в средней области  $R < 0$ . Поскольку вклад от средней части ловушки больше вклада от торцов, то система неустойчива.

Если плазма находится в поле с «shear» (см. раздел 3.2 гл. 7), то элементы плазмы перемещаются одно-

временно с искажением их формы, что увеличивает устойчивость.

Исследования дрейфов, происходящих из-за неоднородности и кривизны магнитного поля, показывают, что разделение зарядов происходит на границе плазма — вакуум (см. рис. 8.2). Возникающее электрическое поле имеет такое направление, что амплитуда возмущения

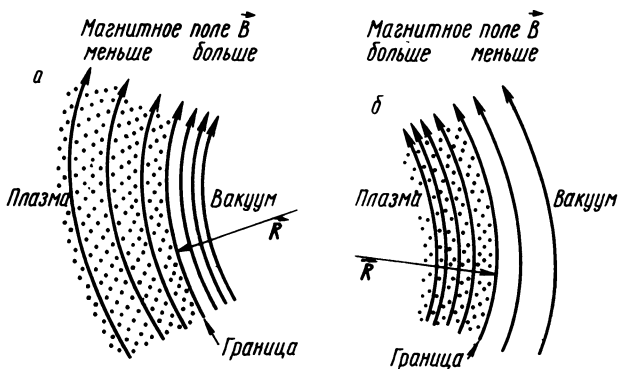


Рис. 8.4. Плазма, удерживаемая магнитным полем остроконечной геометрии (антипробкотрон) (а) и пробочной геометрии (б).

нарастает на внешней границе и уменьшается на внутренней. Следовательно, и в этом случае смещение, возникшее на внешней границе, нарастает, а на внутренней устойчивой границе — затухает во времени.

Таким же способом можно исследовать устойчивость границы плазма — вакуум для любой конфигурации неоднородного магнитного поля (рис. 8.4). Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что граница устойчива, если силовые линии вогнуты в сторону плазмы, так называемая остроконечная геометрия (рис. 8.4, а). В противоположном случае, т. е. для геометрии с магнитными зеркалами, граница неустойчива (рис. 8.4, б). Далее мы увидим, что существуют эффекты, при помощи которых можно стабилизировать желобковую неустойчивость даже для пробочной геометрии.

Изучим более подробно желобковую неустойчивость и эффекты, влияющие на скорость ее роста [72, 96, 101, 168—170]. Воспользуемся методом собственных колеба-

ний и простой локальной теорией возмущений в ограниченной области плазмы.

Предположим, что исследуемая область настолько велика, что возмущения успевают нарасти, не достигнув ее границ. При этом можно считать, что граничные условия не влияют на дисперсионные соотношения. Таким образом, мы не будем решать задачу на собственные значения. При исследовании возмущенного состояния все невозмущенные величины будут считаться константами, а потом будут определены условия, при которых полученные результаты справедливы. Следует отметить, что такой анализ не позволяет исследовать возмущения, масштаб которых сравним с макроскопическими размерами плазмы\*.

## 2. 2. Основные соотношения

Основными соотношениями при исследовании поставленной задачи будут законы сохранения массы (5.17) и импульса (5.20), причем уравнение (5.20) эквивалентно уравнениям (3.46) и (3.47), полученным из дрейфовой теории в первом приближении. Запишем основные уравнения, чтобы движение плазмы можно было представить как движение отдельных частиц. Мы уже пользовались таким представлением в § 2.3 гл. 5, где рассматривали дрейф заданного распределения плотности. Рассмотрим уравнение движения (5.20). Так как нас будет интересовать в некоторых случаях устойчивость вращающейся плазмы, то обобщим основные соотношения, перейдя в систему отсчета, вращающуюся с угловой скоростью  $\vec{\Omega}$ . Предположим для простоты, что плазма вращается как твердое тело, т. е.  $\vec{\Omega} = \text{const.}$  Используя формулы § 2.2 гл. 7, получаем

$$nm \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = nq (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + nmg - \text{div} \vec{\pi} + \frac{1}{2} nm \nabla (\vec{\Omega} \cdot \vec{\rho})^2 + 2nm \vec{v} \times \vec{\Omega}, \quad (8.3)$$

\* Более подробное изложение метода локальной теории возмущений и обсуждение границ его применимости можно найти в обзоре А. Б. Михайловского [171] — *Прим. перев.*

где  $\vec{g}$  — ускорение силы тяжести, а все величины определены во вращающейся системе координат. Величина  $-\frac{1}{2}(\vec{\Omega} \times \vec{\rho})^2$  соответствует потенциалу центробежных сил. Начало координат выбрано на оси вращения.

Обозначим ионы и электроны индексом  $\nu$ , принимающим соответственно два значения:  $i$  и  $e$ . Кроме того, введем следующее обозначение  $d_\nu/dt = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_\nu \cdot \nabla$ . Умножив уравнение (8.3) векторно на  $\vec{B}$ , получим

$$\begin{aligned}
 n_\nu \vec{v}_{\nu \perp} &= n_\nu \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{B^2} + n_\nu m_\nu \vec{g} \times \frac{\vec{B}}{q_\nu B^2} + \vec{B} \times \text{div} \\
 &\frac{\pi_\nu}{q_\nu B^2} - n_\nu m_\nu \frac{d_\nu \vec{v}_\nu}{dt} \times \frac{\vec{B}}{q_\nu B^2} - 2n_\nu m_\nu \vec{B} \times \frac{\vec{v}_\nu \times \vec{\Omega}}{q_\nu B^2} + \\
 &+ \frac{1}{2} n_\nu m_\nu \nabla (\vec{\Omega} \times \vec{\rho})^2 \times \frac{\vec{B}}{q_\nu B^2}. \quad (8.4)
 \end{aligned}$$

Проводимое исследование будет основано на следующих предположениях:

1. Давление плазмы много меньше плотности энергии магнитного поля. Любое поперечное движение плазмы, заметно искажающее магнитное поле, энергетически невыгодно, так как увеличение энергии поля много больше энергии плазмы. Таким образом, магнитное поле приближенно равно вакуумному. Поэтому можно положить  $\text{rot } \vec{B} = 0$  и рассматривать только такие желобковые возмущения, при которых вещество, двигаясь поперек магнитного поля, не меняет его напряженности. Магнитное поле, создаваемое токами плазмы, слабо влияет на движение частиц. Внешние магнитные поля стационарны.

2. Предположим электрическое поле потенциальным, т. е.  $\vec{E} = -\nabla \phi$ . Этим самым мы отделим интересные типы колебаний от таких поперечных мод, как электродинамическая и магнитогидродинамическая волны (ср. с исследованием, проведенным в работе [72]).

Электродинамические и магнитогидродинамические волновые движения сопровождаются эффектами элек-

ромагнитной индукции, которые увеличивают энергию поля. Можно считать, что рассматриваемые возмущения должны иметь скорость, много меньшую скорости света и альфвеновской скорости. То, что при этом электрическое поле потенциально, легко проверить при помощи формул (2.2), (2.10), (8.4). Так как внешнее магнитное поле стационарно, а полем индукции мы пренебрегаем, то  $\partial B/\partial t=0$ .

3. Поскольку  $m_e \ll m_i$ , то можно пренебречь инерцией электронов. Пренебрежем также диссипацией из-за конечной проводимости. Эти эффекты рассмотрены в работах [172, 173].

4. Будем считать, что в невозмущенном состоянии положение центра масс покоится в системе координат, определенной в начале этого параграфа. Плазма при этом оказывается электрически нейтральной.

В различных применениях рассматриваемой теории считается, что векторы

$$\vec{\nabla} N, \operatorname{div} \vec{\pi}_{i0} \text{ и } \operatorname{div} \vec{\pi}_{e0}, \vec{g} \text{ и } \frac{1}{2} m \vec{\nabla} (\vec{\Omega} \times \vec{\rho})^2$$

перпендикулярны к направлению магнитного поля.

Так как  $m_e \ll m_i$ , то можно считать, что в начальном состоянии  $\vec{v}_{i0}=0$ . Тогда небольшой ток электронов вызывает появление силы  $-eN\vec{v}_{e0} \times \vec{B}$ , которая уравнивает силы давления, гравитации и центробежную. Невозмущенное электрическое поле  $E_0$  связывает электроны и ионы. При  $\vec{v}_{i0}=0$  и  $\operatorname{rot} \vec{B} \approx 0$  тензор  $\vec{\pi}_{i0}$  в невозмущенном состоянии можно выразить через  $\vec{\nabla} \vec{B}$  и невозмущенный тензор давления, задаваемый равенством (5.24). Тогда в соответствии с уравнением (8.3) для ионной компоненты получим

$$\vec{E}_0 \approx -\frac{m_i}{e} \vec{g} + \frac{1}{eN} (\operatorname{div} \vec{\pi}_{i0})_{\perp} - \frac{1}{2} \frac{m_i}{e} \vec{\nabla} (\vec{\Omega} \times \vec{\rho})^2. \quad (8.5)$$

В этой формуле отсутствуют продольные скорости  $v_{\parallel}$ .

5. Рассмотрим малые возмущения начального состояния плотности  $n_i = N + \tilde{n}_i$ ,  $n_e = N + \tilde{n}_e$ ; тензоров давления  $\vec{\pi}_i = \vec{\pi}_{i0} + \tilde{\pi}_i$ ,  $\vec{\pi}_e = \vec{\pi}_{e0} + \tilde{\pi}_e$ ; скорости  $\vec{v}_i = \vec{v}_{i0} + \tilde{v}_i$ ,  $\vec{v}_e = \vec{v}_{e0} + \tilde{v}_e$  и электрического поля  $\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{\nabla} \tilde{\varphi}$ . Все величин

ны, отмеченные тильдой, малы. Поэтому в нашем приближении опустим их произведения.

6. Возмущение скорости отлично от нуля только в плоскости, перпендикулярной магнитному полю так, что  $\vec{v}_i = \vec{v}_{i\perp}$ ,  $\vec{v}_e = \vec{v}_{e\perp}$ .

7. Плотность частиц настолько велика, что плазма квазинейтральна, т. е.  $|\tilde{n}_i - \tilde{n}_e| \ll |\tilde{n}_i + \tilde{n}_e|$ , и  $\epsilon_0 \ll Nm_i |B^2|$ . Приближение  $n_i \approx n_e$  легко проверить, подставляя выражение (8.10) в соотношения, полученные в этой главе.

8. Частота вращения электронов и ионов в магнитном поле много больше частоты рассматриваемых колебаний. Ларморовские радиусы частиц много меньше характерной длины волны.

Воспользовавшись перечисленными выше предположениями, подставив выражение (8.5) в формулу (8.4), получим

$$\begin{aligned} n_\nu \vec{v}_{\nu\perp} = & -\frac{2n_\nu m_\nu}{q_\nu B^2} \vec{B} \times (\vec{v}_\nu \times \vec{\Omega}) - n_\nu \vec{\nabla} \tilde{\Phi} \times \frac{\vec{B}}{B^2} + \\ & + n_\nu \left( \frac{m_\nu}{q_\nu} - \frac{m_i}{e} \right) \left[ \vec{g} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{\Omega} \times \vec{\rho})^2 \right] \times \frac{\vec{B}}{B^2} - \\ & - \left( \frac{1}{q_\nu} \operatorname{div} \vec{\pi}_\nu - \frac{n_\nu}{eN} \operatorname{div} \vec{\pi}_{i0} \right) \times \frac{\vec{B}}{B^2} - n_\nu m_\nu \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial t} \times \frac{\vec{B}}{q_\nu B^2}, \\ & \nu = i, e. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Так как невозмущенные величины не зависят от времени, то из уравнения (8.6) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_{\nu\perp}}{\partial t} = & -\frac{2m_\nu}{q_\nu B^2} \vec{B} \times \left( \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial t} \times \vec{\Omega} \right) - \vec{\nabla} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} \times \frac{\vec{B}}{B^2} - \frac{\partial}{\partial t} \times \\ & \times \left( \frac{1}{n_\nu} \operatorname{div} \vec{\pi}_\nu \right) \times \frac{\vec{B}}{q_\nu B^2} - m_\nu \frac{\partial^2 \vec{v}_\nu}{\partial t^2} \times \frac{\vec{B}}{q_\nu B^2} \end{aligned} \quad (8.7)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_{\nu\perp}}{\partial t} \times \vec{B} = & \vec{\nabla}_\perp \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{n_\nu q_\nu} \operatorname{div} \vec{\pi}_\nu \right)_\perp + \frac{m_\nu}{q_\nu} \cdot \frac{\partial^2 \vec{v}_{\nu\perp}}{\partial t^2} - \\ & - \frac{2m_\nu}{q_\nu} \left( \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial t} \times \vec{\Omega} \right)_\perp. \end{aligned} \quad (8.8)$$



Возьмем  $\text{div}$  уравнения (8.6), где левая часть равенства связана с плотностью заряда формулой (5.17). Учитывая, что  $\vec{v}_{v\parallel} = 0$ , при помощи хорошо известных векторных тождеств и четвертого предположения получим уравнение, аналогичное выражению (5.62),

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial n_v}{\partial t} = \text{div}(n_v \vec{v}_v) = & -2 \text{div} \left[ \frac{n_v}{\omega_v B} \vec{B} \times (\vec{v}_v \times \Omega) \right] - \\
 & - (\vec{\nabla} \tilde{\Phi} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{n_v}{B^2} \right) + \frac{1}{B} \left( \frac{1}{\omega_v} - \frac{1}{\omega_i} \right) \left\{ \left[ \vec{g} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\Omega \times \right. \right. \\
 \times \vec{\rho})^2 \left. \left. \right] \times \vec{B} \right\} \cdot \vec{\nabla} n_v + & \frac{2}{q_v B^3} (\vec{B} \times \vec{\nabla} B) \text{div} \vec{\pi}_v - \frac{1}{q_v B^2} \vec{B} \text{rot} (\text{div} \vec{\pi}_v) - \\
 & - \frac{1}{eNB^2} (\vec{B} \times \text{div} \vec{\pi}_{i0}) \cdot \vec{\nabla} n_v - \text{div} \left\{ \frac{N}{\omega_v B} \left[ \vec{\nabla}_{\perp} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{n_v q_v} \text{div} \vec{\pi}_v \right)_{\perp} \right] \right\} - \\
 & - \text{div} \left\{ \frac{N}{\omega_v^2} \left[ \frac{\partial^2 \vec{v}_{v\perp}}{\partial t^2} - 2 \left( \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial t} \times \vec{\Omega} \right)_{\perp} \right] \right\}, \quad (8.9)
 \end{aligned}$$

где введены циклотронные частоты  $\omega_v = q_v B/m_v$ , в которых нужно учитывать знак заряда.

К линеаризованному уравнению (8.9), содержащему величины  $\tilde{n}_i$ ,  $\tilde{n}_e$ ,  $\tilde{\Phi}$ ,  $\vec{v}_i$  и  $\vec{v}_e$ , следует добавить уравнение Пуассона (2.7) для возмущения электрического потенциала

$$\tilde{n}_i - \tilde{n}_e = - \left( \frac{\epsilon_0}{e} \right) \vec{\nabla}^2 \tilde{\Phi}. \quad (8.10)$$

Во многих интересных случаях небольшое отклонение  $\tilde{n}_i - \tilde{n}_e$  от нейтральности приводит к большим электрическим полям, которые невозможно создать при помощи ограниченного запаса энергии, заключенной в плазме, когда, например, характерные макроскопические размеры много больше дебаевского радиуса  $(\epsilon_0 kT_v / e^2 n)^{1/2}$ , где  $T_v$  — температура). Плазма при этом квазинейтральна, т. е. удовлетворяется требование пункта 7 это-

го параграфа. В то же время, когда плотность плазмы мала, отношение  $|n_i - n_e|/|n_i + n_e|$  приблизительно равно единице.

Прежде чем перейти к различным применениям полученных результатов, обсудим физический смысл некоторых членов правой части уравнения (8.9).

Третье слагаемое в правой части содержит величины  $\vec{g}$  и  $\vec{\Omega} \times \vec{r}$ . Множитель, стоящий в этом члене перед  $\vec{\nabla} n_i$ , представляет собой дрейфовую скорость частиц, связанную с гравитационным и центробежным полями. Вид этого члена аналогичен выражению, полученному в разделе 2.3 гл. 5 для дрейфа распределения плотности. Четвертый член содержит  $\vec{\nabla} B$ . Его появление обусловлено дрейфом из-за неоднородности магнитного поля. Как третий, так и четвертый члены имеют разную величину для ионов и электронов, что приводит к разделению зарядов. Это — следствие относительного движения возмущенного распределения плотности ионов и электронов.

Во втором члене правой части уравнения (8.9) нашли отражение два эффекта, которые происходят из-за разделения зарядов. Рассмотрим сначала величину  $-(\vec{\nabla} \tilde{\Phi} \times \vec{B} |B^2|) / \vec{\nabla} n_i$ . Она соответствует смещению поверхностей постоянной плотности со скоростью дрейфа в скрещенных полях  $\vec{u}_E = \vec{E} \times \vec{B} / B^2$ . Эта скорость одинакова для электронов и ионов. Далее для неоднородного магнитного поля происходит сжатие ионного и электронного газов со скоростью  $2(n_i/B^3) (\vec{\nabla} \tilde{\Phi} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla} B = = n_i \operatorname{div} \vec{u}_E$ , если частицы дрейфуют, пересекая поверхность  $B = \text{const}$  со скоростью  $u_E$  (см. § 1 гл. 6).

Часть седьмого члена в правой части уравнения (8.9), содержащая  $\partial \tilde{\Phi} / \partial t$ , также связана с электрическим полем. Появление этого члена обусловлено отклонением от невозмущенных траекторий, связанных с инерциальным дрейфом ионов [см. уравнение (3.25)]. В результате ионы несколько смещаются по отношению к электронам и это приводит к дополнительной поляризации. Ее можно учесть при помощи эквивалентной диэлектрической проницаемости [см. § 2.3 гл. 5, а также уравнение (3.51)]. Вклад от кориолисовых сил содер-

жится в первом члене и, будучи различным для ионов и электронов, приводит к дополнительному разделению зарядов. Согласно данным раздела 2.2 гл. 7, движение частиц в системе координат, вращающейся со скоростью  $\vec{\Omega}$ , эквивалентно движению в покоящейся системе координат, в которой действует эквивалентное магнитное поле, различное для ионов и электронов  $\vec{B} + 2m_i\vec{\Omega}/e$  и  $\vec{B} - 2m_e\vec{\Omega}/e$ . Таким образом, ионы и электроны имеют опять различные скорости дрейфа.

Полный поток частиц через поверхность и его изменение во времени определяются не только движением ведущего центра, но также вращением частиц, которое представлено вкладом от тензора давления в пятом, шестом и седьмом членах правой части уравнения (8.9). Эффекты, связанные с конечностью ларморовского радиуса, т. е. с более высокими приближениями в тензоре давления, содержатся главным образом в пятом члене этого выражения.

Подобные эффекты, связанные с этим видом тензора в нулевом приближении, содержатся в шестом члене.

Наконец, последний член правой части уравнения (8.9) содержит вклады высших порядков, обусловленные силами инерции ионов. Обычно он не учитывается.

### **2. 3. Неустойчивость резкой границы плазмы в поле силы тяжести при малых ларморовских радиусах**

Предположим, что в невозмущенном состоянии плазма с плотностью  $N=N_1$ , расположенная в верхней полуплоскости, отделена резкой границей от плазмы с плотностью  $N=N_2$  в нижней полуплоскости (на рис. 8.5, а). Сила тяжести  $g$  действует вдоль отрицательного или положительного направления оси  $y$ , а плазма удерживается однородным магнитным полем, направленным по оси  $z$  перпендикулярно плоскости рисунка. Предположим для простоты, что тепловые скорости электронов и ионов невелики, так что эффекты, связанные с конечностью ларморовского радиуса, можно не учитывать.

Рассмотрим теперь возмущение границы, которое представляет собой синусоиду с длиной волны  $2\pi/k_x$ ,

причем возмущенное состояние вначале такое, что плазму можно считать электрически нейтральной по обе стороны границы, а плотность плазмы равна соответственно

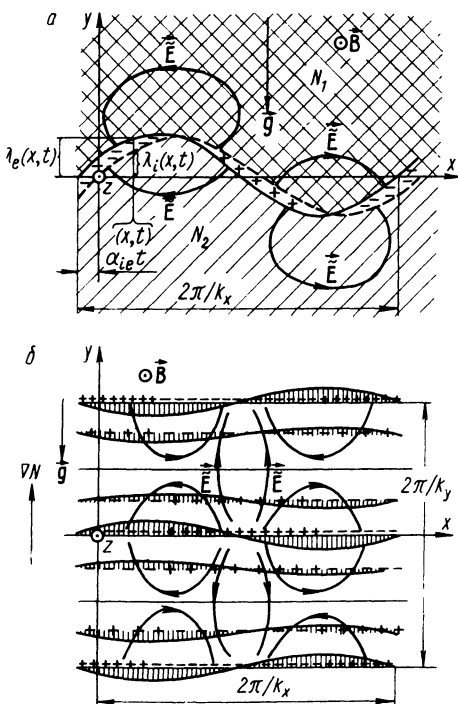


Рис. 8.5. Разделение зарядов во внутренней области замагниченной плазмы в результате гравитационного дрейфа распределения плотности.

*a* — резкая граница между двумя областями, занятыми плазмой с плотностью  $N_1$  и  $N_2$ ; *b* — градиент плотности невозмущенного состояния  $dN/dy$  при синусоидальном возмущении плотности в плоскости  $x, y$  приводит к образованию впадин и горбов по поверхности постоянной плотности. Вертикально заштрихованные участки соответствуют увеличению плотности при отклонении от оси  $x$  вниз и уменьшению плотности при отклонении вверх.

$N_1$  и  $N_2$ . Таким образом, амплитуды  $\lambda_i$  и  $\lambda_e$  пространственных возмущений плотности электронов и ионов равны в начальном состоянии, т. е.

$$\lambda_i(0) = \lambda_0 \sin k_x \cdot x = \lambda_e(0). \quad (8.11)$$

Во всей внутренней области плазмы, исключая границу, уравнение (8.9) принимает вид

$$-\frac{\partial n_i}{\partial t} = - \left( \vec{\nabla} \tilde{\Phi} \times \frac{\vec{B}}{B^2} \right) \cdot \vec{\nabla} n_i - \frac{N}{\omega_i B} \vec{\nabla}^2 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} \quad (8.12)$$

и

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = - \left( \vec{\nabla} \tilde{\Phi} \times \frac{\vec{B}}{B^2} \right) \cdot \vec{\nabla} n_e - \frac{1}{\omega_i B} (\vec{g} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla} n_e. \quad (8.13)$$

Так как невозмущенные плотности  $N_1$  и  $N_2$  не зависят от координат и времени, то линеаризация уравнения (8.13) приводит к соотношению

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\omega_i B} (\vec{g} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla} \right] n_e = 0. \quad (8.14)$$

Отсюда следует, что распределение плотности электронов не меняется в системе координат, движущейся со скоростью  $\vec{u}_g = -\vec{g} \times \vec{B} / \omega_i B$  относительно центра масс невозмущенного состояния. Мы считали, что в начальный момент времени  $n_e(0)$  было равно  $N_1$  и  $N_2$  в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Поэтому  $n_e$  остается постоянной внутри плазмы во все остальные моменты времени. Этого следовало ожидать, так как мы пренебрегли инерционным дрейфом электронов.

Вычитая из выражения (8.12) уравнение (8.13), при помощи уравнения (8.10) получим

$$\frac{1}{e} \left( \epsilon_0 + \frac{m_i N}{B^2} \right) \vec{\nabla}^2 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} = \frac{1}{\omega_i B} (\vec{g} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla} n_e. \quad (8.15)$$

Вспоминая, что  $n_e$  постоянная величина внутри плазмы, а  $\tilde{\Phi}$  обращается в нуль в начальный момент времени, получаем

$$\vec{\nabla}^2 \tilde{\Phi} = 0 \quad (\text{внутри плазмы}) \quad (8.16)$$

Учитывая условие непрерывности электрического потенциала при переходе через границу, получаем уравнение (8.16), ограниченное при  $y = \pm \infty$ ,

$$\tilde{\Phi} = [S_b(t) \sin k_x x + C_b(t) \cos k_x x] \exp(\mp k_x y). \quad (8.17)$$

Здесь  $S_b$  и  $C_b$  — функции времени;  $2\pi/k_x$  — длина волны возмущения границы, а плюс и минус относятся к нижней и верхней полуплоскостям рис. 8.5, а.

Согласно дрейфовой теории и уравнениям (8.12) и (8.13), ведущие центры ионов и электронов в первом приближении дрейфуют так же, как соответствующие распределения плотности. Скорость поперечного дрейфа одинакова для ионов и электронов и составляет  $(1/B) \partial \tilde{\Phi} / \partial x$ . Далее, смещение ионов в горизонтальном направлении примерно равно нулю, а электроны двигаются вдоль оси  $x$  со скоростью  $u_g = -g/\omega_i$ , где  $g$  может иметь любой знак. В системе координат, движущейся вместе с дрейфующей частицей, радиусы пространственного распределения зарядов меняются во времени, так что

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_i = \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} \right) \lambda_e = \frac{1}{B} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} \right)_{y=0}. \quad (8.18)$$

Здесь правая часть уравнения вычисляется в точках слабозвозмущенной границы. Будем считать, что для амплитуд пространственного возмущения справедлива следующая зависимость:

$$\lambda_i = S_i(t) \sin k_x x + C_i(t) \cos k_x x \quad (8.19)$$

и

$$\lambda_e = S_e(t) \sin(k_x x - \alpha_{ie} t) + C_e(t) \cos(k_x x - \sigma_{ie} t). \quad (8.20)$$

Здесь  $\alpha_{ie} = k_x u_g$  — частота, с которой электронное облако колеблется относительно ионного.

Отделение ионного облака от электронного за счет дрейфового движения вызывает появление электрического заряда

$$\sigma_s = e(N_1 - N_2)(\lambda_i - \lambda_e) \quad (8.21)$$

на единицу площади плоскости  $xz$ . Так как возмущение мало, этот заряд можно считать поверхностным, расположенным вблизи невозмущенной границы  $y=0$ . При помощи уравнения (8.18) определим скорость изменения этого заряда во времени

$$-\frac{\partial \sigma_s}{\partial t} = e(N_2 - N_1) u_g \frac{\partial \lambda_e}{\partial x}. \quad (8.22)$$

В данном случае характерно время, в течение которого электронное облако проходит через ионное в направлении оси  $x$ .

Следует отметить, что на движение электронного облака не влияют инерционные дрейфы. Поэтому скорость изменения плотности заряда, созданного электронами, определяется скоростью конвекции  $\vec{u}_g$ . Ионное облако за счет инерционного дрейфа движется очень медленно, кроме того, инерционный дрейф приводит к появлению дополнительного пространственного заряда.

Предположим, что градиенты плотности на границе конечны, но очень велики. Тогда скорость изменения заряда из-за конвекции электронов определяется правой частью уравнения (8.15), которая совпадает с правой частью уравнения (8.22) в пределе резкой границы. Следовательно, интересующую нас задачу можно свести к изучению колебаний поверхностного заряда [уравнение (8.21)], распределенного на поверхности, отделяющей среду с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_0 + m_i N_1 / B^2$  от среды с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_0 + m_i N_2 / B^2$ . Это верно до тех пор, пока мы пренебрегаем ларморовским движением ионов и электронов [см. формулу (5.55)]. Полученный результат сохраняется даже тогда, когда нарушается седьмое условие раздела 2.2.

Согласно теории нормальные компоненты электрического поля  $-\vec{\nabla}\tilde{\Phi}$  с обеих сторон заряженного слоя связаны следующим образом:

$$\sigma_s = - \left( \epsilon_0 + m_i \frac{N_1}{B^2} \right) \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} \right)_1 + \left( \epsilon_0 + m_i \frac{N_2}{B^2} \right) \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} \right)_2. \quad (8.23)$$

Здесь производные берем по обе стороны границы в непосредственной близости от нее.

Комбинируя полученные выражения с формулой (8.17), получаем следующее соотношение:

$$-\left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} \right)_1 = \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} \right)_2 = \sigma_s / [2\epsilon_0 + m_i (N_1 + N_2) / B^2]. \quad (8.24)$$

Дифференцируя уравнение (8.24) по  $x$  и используя уравнения (8.18) и (8.21), получаем

$$\dot{S}_i \sin k_x x + \tilde{C}_i \cos k_x x = \dot{S}_e \sin(k_x x - \alpha_{ie} t) +$$

$$+ C_e \cos(k_x x - \alpha_{ie} t) = \frac{1}{4} \alpha_{ie} \Gamma [S_i \cos k_x x - C_i \sin k_x x - \\ - S_e \cos(k_x x - \alpha_{ie} t) + C_e \sin(k_x x - \alpha_{ie} t)]. \quad (8.25)$$

Здесь

$$\Gamma = \frac{4e^2 (N_1 - N_2)}{k_x g m_i [2\varepsilon_0 + m_i (N_1 + N_2)/B^2]}. \quad (8.26)$$

Это уравнение можно решить элементарными методами [169]. После простых тригонометрических преобразований и введения новых переменных  $S_i + S_e$ ,  $S_i - S_e$ ,  $C_i + C_e$  и  $C_i - C_e$  уравнение легко решается.

В результате  $S_i = S_e = \lambda_s$  и  $C_i = -C_e = \lambda_e$ , где

$$\lambda_s/\lambda_0 = \cos\left(\frac{1}{2} \alpha_{ie} t\right) \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2} \Gamma' \alpha_{ie} t\right) + \\ + \left(\frac{1}{\Gamma'}\right) \sin\left(\frac{1}{2} \alpha_{ie} t\right) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2} \Gamma' \alpha_{ie} t\right), \quad \Gamma > 1, \quad (8.27)$$

$$\lambda_s/\lambda_0 = \cos\left(\frac{1}{2} \alpha_{ie} t\right) \cos\left(\frac{1}{2} |\Gamma'| \alpha_{ie} t\right) + \\ + \left|\frac{1}{\Gamma'}\right| \sin\left(\frac{1}{2} \alpha_{ie} t\right) \sin\left(\frac{1}{2} |\Gamma'| \alpha_{ie} t\right), \quad \Gamma < 1, \quad (8.28)$$

а  $\Gamma' = (\Gamma - 1)^{1/2}$ . Подобные соотношения справедливы также для  $\lambda_s$ . Из формул (8.26) — (8.28) следует, что система неустойчива, когда  $\Gamma > 1$ , и устойчива, когда  $\Gamma < 1$ . Согласно уравнению (8.26) знак выражения  $\frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$  определяет знак  $\Gamma$ . Возможны три случая.

1. Если  $(N_1 - N_2)/g > 0$ , т. е.  $\Gamma < 1$ , то это соответствует системе — легкая жидкость над тяжелой. Такое равновесие всегда устойчиво.

2. Если  $\Gamma > 1$ , а  $(N_1 - N_2)g < 0$ , то в данном случае возникает неустойчивость, аналогичная гравитационной неустойчивости Релея — Тэйлора (тяжелая жидкость над легкой). Это имеет место для достаточно больших значений величины  $(N_1 - N_2)/(N_1 + N_2)$ . В случае, когда  $N_2 \rightarrow 0$ , а плазма имеет резкую границу (см. рис. 8.1), решение (8.27) принимает вид

$$\lambda_s = \lambda_0 \exp(g k_x t^2)^{1/2} \quad (8.29)$$



для малых значений величины  $\alpha_{iet}$  (см. рис. 8.5, *a*). Этот результат впервые получен в работе [168]. При этом плазма уходит с экспоненциально нарастающей скоростью поперек магнитного поля. Когда амплитуда возмущения станет достаточно большой, дальнейший рост ее может прекратиться из-за нелинейных эффектов.

3. Если  $0 < \Gamma < 1$ , а  $(N_1 - N_2)/g < 0$ , то можно по-прежнему использовать аналогию с равновесием тяжелой жидкости, расположенной над легкой. В этом случае амплитуда возмущения также нарастает во времени при малых  $\alpha_{iet}$ , как и во втором случае. Однако вынуждающая сила, зависящая от разности плотностей  $N_1 - N_2$ , приводит к появлению электрического поля, которое теперь слабее, а следовательно, возмущение нарастает медленнее. Когда величина  $\alpha_{iet}$ , определяющая разделение зарядов, достигает значения  $\pi/2$ , дрейф из-за электрического поля меняет направление, что приводит к колебаниям. Такие колебания могут происходить и во втором случае (слабая неустойчивость), однако из уравнения (8.28) следует, что амплитуда остается конечной.

В заключение отметим, что решение, определяемое формулой (8.29), не зависит от магнитного поля, а инкремент неустойчивости совпадает с инкрементом гидродинамической неустойчивости Релея — Тэйлора. В более общем случае решение зависит от напряженности магнитного поля [см. уравнения (8.27), (8.28)].

## 2. 4. Учет конечного градиента плотности

Из вышеизложенного следует, что при достаточно малом скачке плотности на внутренней границе плазмы возникающие силы достаточно малы и граница оказывается устойчивой относительно желобковых возмущений, заданной длины волны. В действительности плазма никогда не имеет резкой границы. Поэтому рассмотрим случай, когда градиент плотности имеет конечную величину. При этом следует помнить, что равновесные конфигурации, в которых поверхностный ток отделяет плазму без магнитного поля от вакуумного магнитного поля, локально устойчивы. Положение меняется при наличии в плазме магнитного поля, когда токи распределены по

объему и имеются конечные градиенты плотности и давления [141].

Предположим, что в невозмущенном состоянии распределение плотности таково, что градиент  $N' \equiv dN/dy$  конечен (рис. 8.5, б). Будем рассматривать гравитационную неустойчивость в однородном магнитном поле  $B$ , учитывая, однако, эффекты теплового движения и конечного ларморовского радиуса. В то же время будем считать, что характерная длина изменения невозмущенной плотности  $L_{cN} \equiv N/|dN/dy|$  много больше, чем характерный размер возмущения, наиболее быстро изменяющегося в пространстве  $L_{c \text{ мин}}$ . Наконец, пусть скорости вращения ионов  $\omega_i$  и электронов  $\omega_e$  постоянны в пространстве в невозмущенном состоянии.

Предположим, что это состояние испытывает возмущения синусоидальной формы в направлениях  $x$  и  $y$ , имеющее длины волн  $L_x = 2\pi/k_x$  и  $L_y = 2\pi/k_y$  соответственно. На рис. 8.5, б показано, как при этом изменятся поверхности постоянной плотности. В частности, появляются горбы и впадины в распределении плотности, что приводит к разделению зарядов и появлению электрического поля  $\vec{E}$ , как и в случае резкой границы (рис. 8.5, а).

Воспользовавшись результатами разделов 1.2 и 4.3, а также уравнением (4.110), получим, что магнитный момент  $M = mW^2/2B$  есть величина постоянная как для ионов, так и электронов. Так как в рассматриваемом приближении  $B$  не зависит от  $y$ , то и  $W_i^2$  и  $W_e^2$  остаются постоянными при движении частиц. Позднее мы оценим вклад высших порядков в тензор давления. Сейчас же ограничимся приближением, когда тензор давления можно считать скаляром, т. е.

$$(\text{div } \vec{\pi}_i)_\perp \approx K_{i\perp} \vec{\nabla}_\perp n_i, \quad (\text{div } \vec{\pi}_e)_\perp \approx K_{e\perp} \vec{\nabla}_\perp n_e, \quad (8.30)$$

согласно уравнению (5.24). Как будет показано в разделе 2.5, это приближение справедливо для таких конфигураций, когда плотность зависит только от одной координаты, а  $L_{cN} \gg L_{c \text{ мин}} = \frac{1}{2\pi(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}}$ . В рассмат-

риваемом случае силовые линии магнитного поля прямые, а поперечные энергии в этом приближении  $K_{i\perp} =$

$=\bar{M}_i B$  и  $K_{e\perp}=\bar{M}_e B$  — постоянные величины. Преобразуем уравнение (8.9)

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial n_v}{\partial t} = & -(\vec{\nabla}\tilde{\Phi}\times\vec{B}/B^2)\cdot\vec{\nabla}n_v + \frac{1}{B}\left(\frac{1}{\omega_v} - \frac{1}{\omega_i}\right)(\vec{g}\times\vec{B})\times \\
 & \times\vec{\nabla}n_v + \frac{K_{i\perp}}{eNB^2}(\vec{\nabla}N\times\vec{B})\cdot\vec{\nabla}n_v - \operatorname{div}\left[\frac{N}{\omega_v B}\left[\vec{\nabla}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial t} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{K_{v\perp}}{n_v q_v}\vec{\nabla}n_v\right)\right]\right]. \quad (8.31)
 \end{aligned}$$

Линеаризуя это уравнение и пренебрегая членами порядка  $(L_x^{-2}+L_y^{-2})^{-1}/L_{cN}^2$  по сравнению с единицей в последнем слагаемом в правой части, получаем для ионов

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial\tilde{n}_i}{\partial t} = & \frac{N'}{B}\cdot\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x} + u_f\frac{\partial\tilde{n}_i}{\partial x} - \frac{N}{\omega_i' B}\vec{\nabla}^2\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial t} - \\
 & -\frac{K_{i\perp}}{e\omega_i B}\vec{\nabla}^2\frac{\partial\tilde{n}_i}{\partial t} \quad (8.32)
 \end{aligned}$$

и для электронов

$$-\frac{\partial\tilde{n}_e}{\partial t} = \frac{N'}{B}\cdot\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x} + (u_f + u_g)\frac{\partial\tilde{n}_e}{\partial x}, \quad (8.33)$$

где  $u_f = N'K_{i\perp}/cNB$ , а  $u_g = -g/\omega_i$ . Отметим, что появление последнего слагаемого в правой части уравнения (8.32) обусловлено скоростью  $v_g$  в уравнении (5.53). Для  $(L_x^{-2} + L_y^{-2})^{-1}/L_{cN}^2 \ll 1$  и  $\varepsilon_0 \ll Nm_i/B^2$  из уравнений (8.10), (8.32), (8.33) можно получить

$$\left[\vec{\nabla}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (u_g + u_f - u_k)\vec{\nabla}^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial t} + G_{ie}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right](\tilde{\Phi}, \tilde{n}_i, n_e) = 0, \quad (8.34)$$

где  $u_k = K_{i\perp}N'/Nm_i\omega_i$ , а  $G_{ie} = -u_g\omega_iN'/N$ . Здесь мы предположили, что члены, содержащие  $\tilde{n}_i$ ,  $\tilde{n}_e$  и  $\tilde{\Phi}$ , в уравнениях (8.32) и (8.33) не обращаются в нуль каждый в отдельности. Иначе бы система была переопределена и ее можно было бы решить только в некоторых частных случаях.

При выводе уравнения (8.34) мы пренебрегли  $\epsilon_0$  по сравнению с  $Nm_i/B^2$ , что обычно является хорошим приближением. В этом случае альфвеновская скорость много меньше скорости света, а избыточный электрический заряд  $e(n_i - n_e)$  очень мал. Заряд, возникший из-за гравитационного дрейфа, описывается правой частью уравнения (8.15). Он компенсируется зарядом, возникшим из-за инерционного дрейфа, который описывается слагаемым  $m_i N/B^2$  в левой части того же уравнения. Благодаря этому плазма ведет себя как поляризуемая среда с большой диэлектрической постоянной. Вообще существуют также другие эффекты разделения зарядов. Это будет показано в разделе 2.5.

Для собственных колебаний типа  $\exp[i(k_x x + k_y y + \omega t)]$  уравнение (8.34) позволяет сразу получить дисперсионное соотношение [96, 169]

$$\omega = \frac{1}{2} (\alpha_{ie} - k_x u_f + k_x u_x) \pm \frac{1}{2} [(\alpha_{ie} - k_x u_f + k_x u_x)^2 - 4\alpha_{ie}\Gamma]^{1/2} = \frac{1}{2} \alpha_{ie} \pm \frac{1}{2} \alpha_{ie} (1 - \Gamma)^{1/2}, \quad (8.35)$$

где  $\alpha_{ie} = -k_x u_g$ ,

а

$$\Gamma = - \frac{4N'\omega_i^2}{N(k_x^2 + k_y^2)g}. \quad (8.36)$$

В последнем члене формулы (8.35) мы положили  $u_f \equiv u_h$ . Раньше мы использовали обозначения  $u_f$  и  $u_h$  только для того, чтобы легче исследовать различные физические эффекты, встречающиеся при решении задачи. Величина  $u_h$  появляется в выражении (8.35) из последнего члена уравнения (8.32). Мы рассмотрим это более подробно в разделе 2.5, где установлено, что дисперсионное соотношение (8.35) соответствует случаю больших, но конечных градиентов плотности.

Из полученного выражения для  $\omega$  видно, что  $\omega$  зависит от  $y$ . Поэтому может возникнуть вопрос, является ли выражение (8.34) истинным решением или нет, т. е. можно ли было решать данную задачу методами теории локальных возмущений. Для того чтобы ответить на

этот вопрос, воспользуемся сделанным в начале параграфа предположением  $L_{cN} \gg L_{c \text{ мин}}$ . При этом из выражений (8.35) и (8.36) следует, что  $\omega$  почти не зависит от  $y$  для произвольных распределений  $N(y)$ . В частном случае, когда  $N = \text{const} \cdot \exp(\text{const} \cdot y)$ , дисперсионное соотношение для  $\omega$  не зависит от  $y$  и является точным решением уравнения (8.34). Таким образом, в теории локальных возмущений всегда можно выбрать такие функции  $N$ , которые дадут простые приближенные решения типа (8.35) в достаточно большой области пространства, причем эти решения будут довольно хорошо описывать наиболее существенные физические свойства данной задачи.

Из уравнений (8.35) и (8.36) можно получить условие устойчивости  $\Gamma < 1$ , которое тесно связано с результатами (8.27) и (8.28) для резкой границы плазмы. Таким образом, при  $N'/g > 0$  все моды устойчивы, а градиент плотности и сила, возникающая из-за гравитации, действуют в одном направлении, как в первом случае. При  $\Gamma > 1$  плазма становится неустойчивой, так как возникающие при разделении заряда силы слишком велики. Это соответствует второму случаю § 2.3. Наконец, при  $0 < \Gamma < 1$  и  $N'/g < 0$  дестабилизирующие эффекты подавляются, так как силы, возникающие при возмущении плотности, малы (плавное распределение плотности), а также из-за периодического изменения направления электрического поля, как это показано в третьем случае § 2.3. Возмущения плотности и электрического поля осциллируют при этом с конечными амплитудами.

В рассмотренном примере эффекты конечного лармовского радиуса обуславливают появление членов  $u_f$  и  $u_h$ , происходящих из шестого и седьмого слагаемых правой части уравнения (8.9). Если тензор давления можно считать скаляром [см. уравнение (8.30)], то вклады этих членов сокращаются, так как  $u_f \equiv u_h$ . Найденную здесь стабилизацию можно рассматривать как результат действия конечного градиента плотности в уравнении (8.36), когда  $|\Gamma|$  уменьшается при увеличении  $|N|$ . Это можно также считать следствием эффекта Холла, что легко видеть, подставив уравнения (8.3) для ионов и электронов в обобщенный закон Ома [96]. Влияние эффекта Холла на устойчивость плазмы исследовано в работах [174, 175].

## 2.5. Эффекты, связанные с конечностью ларморовского радиуса

Особого рассмотрения требуют случаи, когда не выполняется условие  $L_{cN} \gg L_{c \text{ мин}}$ . При этом необходимо учитывать следующее приближение в тензоре давления и пятый член правой части уравнения (8.9). Это приводит к появлению эффектов, связанных с конечностью

ларморовского радиуса, и к дополнительному разделению зарядов. Впервые эта задача решена в работе [72] с помощью уравнения Больцмана. При этом учитывались дополнительные члены, которые соответствуют слагаемому  $(1/4)a^2 \nabla_{\perp}^2 \vec{F}$  в уравнении (3.40). В нашем изложении критерий устойчивости будет выведен при помощи результатов § 2.2 и учета членов второго порядка по отношению ко второму слагаемому уравнения (8.9).

Предположим для простоты, что  $N'/N = \text{const}$  и возмущение не зависит от  $y$ , т. е. возмущение имеет форму желобков, как это показано на рис. 8.6. Рассмотрим

как и в разделе 2.4, неустойчивость в поле силы тяжести. В уравнении (8.32) согласно нашему предположению все производные по  $y$  равны нулю. Воспользовавшись теперь более общими выражениями (5.48) — (5.50) для тензора давления, получим

$$(\text{div } \pi_i)_{\perp} = \nabla(K_{i\perp} n_i) + \frac{1}{4} e B \bar{a}_i^2 \left( -N \frac{\partial^2 v_{iy}}{\partial x^2} + N' \frac{\partial v_{ix}}{\partial x}, \right. \\ \left. N' \frac{\partial v_{ix}}{\partial x} + N \frac{\partial^2 v_{ix}}{\partial x^2}, 0 \right). \quad (8.37)$$

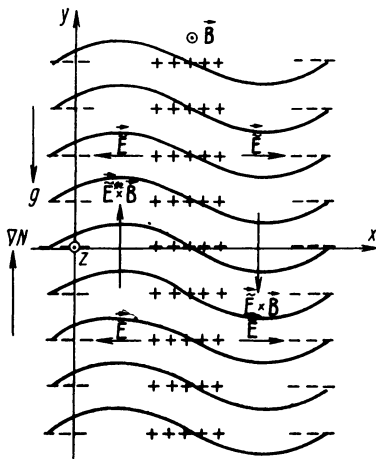


Рис. 8.6. Конфигурация, подобная изображенной на рис. 8.5, б. Различие состоит в том, что возмущение плотности имеет вид длинных желобков, протянувшихся в направлении  $y$ . Поверхности постоянной плотности в нормальном состоянии являются синусоидами.

Так как ларморовский радиус электронов мал, то можно считать, что тензор давления для электронов определяется выражением (8.30). Следовательно, с точностью до членов второго порядка имеем

$$\frac{1}{eB^2} \vec{B} \operatorname{rot} (\operatorname{div} \vec{\pi}_i) = \frac{1}{2} \bar{a}_i^2 \frac{N'}{B} \cdot \frac{\partial^3 \tilde{\Phi}}{\partial x^3}. \quad (8.38)$$

Итак, уравнение (8.33) остается тем же, а из правой части выражения (8.32) нужно вычесть правую часть уравнения (8.38).

В первом приближении по аналогии с уравнением (8.34), полагая  $u_f = N' K_{i\perp} / eNB$ , получаем

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (u_g + u_f) \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + G_{ie} \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\tilde{\Phi}, n_i, n_e) = 0. \quad (8.39)$$

Здесь  $G_{ie} = -u_g \omega_i N' / N$ , как и в разделе 2.4. Для собственных колебаний вида  $\exp[i(k_x x + \omega t)]$  при  $\alpha_{ie} = k_x g / u_i$  получим дисперсионное соотношение

$$\omega = \frac{1}{2} (\alpha_{ie} - k_x u_f) \left\{ 1 \pm \left[ 1 - \frac{\Gamma}{(1 - k_x u_f / \alpha_{ie})^2} \right]^{1/2} \right\}, \quad (8.40)$$

где  $\Gamma$  определяется формулой (8.36) при  $k_y = 0$ . Решая непосредственно уравнения (8.4) без применения итераций, получаем кубическое уравнение, два корня которого определяются формулой (8.40), а третий — величиной порядка  $\omega_i$ . Последний корень не может быть решением, так как при  $\omega \sim \omega_i$  нарушаются условия адиабатической инвариантности. Далее будет показано, что при таком подходе не исключено появление резких градиентов плотности, поэтому теория локальных возмущений дает правильный результат только в том случае, когда  $N'/N = \text{const}$ .

Уравнение (8.40) согласуется с дисперсионным соотношением [72]. Его можно также вывести из одножидкостной модели [96]. Теперь определим критерий устойчивости

$$\Gamma < \left( 1 - \frac{k_x u_f}{\alpha_{ie}} \right)^2 \quad \text{или} \quad \left( \frac{k_x \bar{a}_i^2 N^2}{N} \right)^2 \left( 1 - \frac{\alpha_{ie}}{k_x u_f} \right) > 16 \times \\ \times \left( -\frac{gN'}{N\omega_i^2} \right), \quad (8.41)$$

где

$$\frac{k_x u_f}{\alpha_{ie}} = \frac{1}{2} \frac{\bar{a}_i^2 \omega_i^2}{N g} \frac{N'}{N g} = \frac{1}{2} W_i^2 \frac{N'}{N g}. \quad (8.42)$$

Если энергия поперечного движения  $1/2 m_i W_i^2$  мала по сравнению с работой силы гравитации  $m_i g |N/N'|$  на пути, равном характерной длине  $L_{cN} = |N/N'|$ , то поправками, возникшими при учете высших порядков в тензоре ионного давления, можно пренебречь. В этом случае получается тот же результат, что и в § 2.4 при  $k_y = 0$ . В то же время, если поперечная энергия много больше работы силы гравитации на указанном пути, то устойчивость определяется вкладом  $k_x u_f / \alpha_{ie}$  в первое условие (8.41). При этом система оказывается устойчивой для возмущений с конечной длиной волны, если градиент плотности и ларморовский радиус достаточно велики для того, чтобы выполнялись условия (8.41).

Если сила тяжести и градиент плотности имеют противоположные направления, то учет эффекта конечного ларморовского радиуса в тензоре ионного давления, а также конечный градиент плотности приводят к тому, что система становится более устойчивой. Второй из указанных эффектов приводит к устойчивости системы при малых градиентах плотности, а первый — при больших.

Остановимся теперь на парадоксах, которые содержатся в полученных результатах. Если исходным положением для сделанного вывода служит соотношение (8.30) (давление — скаляр) и если, кроме того, опустить в выражении (8.35)  $u_h$ , то оказалось бы, что условие устойчивости формально совпадает с соотношениями (8.41) [72]. Пренебрегая  $u_h$ , мы опускаем последний член выражения (8.32), который связан со скоростью изменения момента количества движения при ларморовском вращении. Если же мы удержим этот член и в качестве тензора давления используем выражение (8.30), то слагаемые, содержащие  $u_f$  и  $u_h$  в уравнении (8.35), взаимно уничтожатся, так как  $u_f \equiv u_h$ . В этом случае условие устойчивости отличается от условия (8.41) и имеет вид  $\Gamma < 1$  (см. раздел 2.4 [169]). Однако отсюда вовсе не следует, что эффект, найденный в работе [72], отсутствует. Как было показано в работе [96], а также в этой главе,



члены более высокого порядка в тензоре ионного давления дают дополнительный вклад в условие устойчивости. Этот вклад в точности равен вкладу, связанному с  $u_f$ , поэтому выражение для коэффициента перед  $\partial^2/\partial x \partial t$  в уравнении (8.39) содержит сумму  $u_f - u_f + u_f = u_f$ . Таким образом, условие устойчивости не меняется.

Полученные результаты прекрасно иллюстрируют трудности, которые могут возникнуть, если в дифференциальном уравнении отбрасывать члены высшего порядка по малому параметру. Так, например, отношение последнего члена ко второму члену правой части уравнения (8.32) равно по порядку величины  $m/eB \times \times (N/N' L_c \tilde{t}_c)$ , где  $L_c$  и  $t_c$  — характерные масштабы длины волны и периода возмущения. Подобно этому отношение правой части уравнения (8.38) и первого члена правой части уравнения (8.32) примерно равно  $a_i^2/2\tilde{L}_c^2$ . На первый взгляд кажется, что можно опустить последний член в уравнении (8.32), т. е. пренебречь тем вкладом от  $v_g$  в уравнении (5.58), который соответствует изменению момента при ларморовском вращении. Подобно этому можно пренебречь эффектом конечного ларморовского радиуса, описываемым формулой (8.38).

Однако эти приближения приводят к неправильным выводам, так как при учете последнего члена в уравнении (8.32) и соотношения (8.38) окончательные результаты существенно меняются. Вклад их в дисперсионное соотношение так же важен, как и слагаемые, возникшие из членов, содержащих  $u_f \partial/\partial x$  в уравнениях (8.32) и (8.33). Другими словами, при оценке различных членов дифференциального уравнения следует принимать во внимание не только порядок величины, но и их математическую структуру. Наконец, эти результаты наглядно показывают, что замена  $\epsilon_0$  в уравнении (2.5) эквивалентной диэлектрической постоянной  $Nm_i/B^2$  является слишком грубым приближением. Выражение (8.38), а также разность между уравнениями (8.32) и (8.33) соответствуют дополнительным членам в тензоре давления, связанным с ларморовским вращением. Когда же  $\epsilon_0$  заменяется  $Nm_i/B^2$ , то эти эффекты не учитываются. Получающиеся при этом уравнения для скорости локального изменения плотности электрического заряда  $\partial\sigma/\partial t$  нельзя свести к уравнениям типа (2.5) и (3.50).

## 2. 6. Эффект магнитного сжатия

До сих пор мы изучали гравитационную неустойчивость плазмы в однородном магнитном поле. Если внешнее гравитационное поле отсутствует, но магнитное поле неоднородно, то, возможно, градиент магнитного поля приведет к желобковой неустойчивости, причем роль гравитационного дрейфа играет здесь дрейф за счет неоднородности магнитного поля. Таким образом, разделение зарядов происходит из-за магнитного градиентного дрейфа. Частично этот дрейф возникает благодаря центробежной силе при движении частицы вдоль искривленной силовой линии.

Однако полной аналогии между гравитационной неустойчивостью и неустойчивостью в неоднородном магнитном поле нет. В последнем случае появляются эффекты магнитного сжатия или расширения, когда плазма движется перпендикулярно поверхности  $B = \text{const}$  под влиянием электрического поля со скоростью  $\vec{u}_E = \vec{E} \times \vec{B} / B^2$ . Критерии устойчивости при этом могут измениться [101].

Указанные эффекты сжатия можно объяснить при помощи результатов, полученных в разделе 2.3 гл. 5, § 6.1 и разделе 2.2 гл. 6, где показано, что поверхности постоянной плотности и отдельные частицы движутся с различными скоростями. Приведем простой пример влияния таких эффектов на развитие желобковой неустойчивости. Рассмотрим цилиндрическую конфигурацию (рис. 8.2), имеющую, однако, конечный градиент плотности плазмы в радиальном направлении. Искажение поверхности постоянной плотности приведет к появлению электрического поля  $\vec{E}$  и соответствующего ему дрейфового движения (см. рис. 8.2). Будем считать, что градиенты давления и плотности вдоль силовых линий быстро размываются, так что возмущение не зависит от азимутальной координаты  $\varphi$ . В этом случае смещения подобны изображенным на рис. 6.2, а. Как и в предыдущих случаях, поверхностные заряды возникают из-за дрейфового движения ионов и электронов на невозмущенной поверхности  $N = \text{const}$ . Теперь, однако, движение возмущенных поверхностей постоянной плотности связано не только с переносом вещества со скоростью

$\vec{E} \times \vec{B} / B^2$ . Одновременно возникают дополнительные эффекты из-за сжатия и расширения при движении поперек поверхности  $B = \text{const}$ , причем скорость сжатия пропорциональна  $\text{div}(\vec{E} \times \vec{B} / B^2)$ , т. е. локальные изменения плотности происходят не только из-за конвекции со скоростью  $(\vec{E} \times \vec{B} / B^2) \cdot \vec{\nabla} N = -(\vec{E}_z / B)(dN/dr)$ , но и из-за магнитного сжатия со скоростью  $N \text{div}(\vec{E} \times \vec{B} / B^2) = = 2N(\vec{E}_z / B^2)(dB/dr)$ .

Это следствие того, что, дрейфуя в неоднородном магнитном поле, частицы сосредотачиваются в радиальном направлении, поперек поверхности  $B = \text{const}$ , т. е. неоднородность магнитного поля влияет на распределение поверхностного заряда и тем самым на раскачку желобковой неустойчивости. Рассмотрим случай конечного градиента плотности на внешней границе плазмы (см. рис. 8.2).

Мы видим, что там, где возмущение плотности было наибольшим, оно станет меньше, ибо движение происходит в направлении более слабого магнитного поля, так как согласно уравнению (6.13)  $n/B^2 = \text{const}$ . Отсюда следует, что неустойчивость подавляется неоднородностью магнитного поля.

Исследуем теперь детально задачу об устойчивости данной конфигурации при условии, что характерная длина изменения невозмущенной плотности много больше наименьшей длины волны. Для простоты рассмотрим только эффекты низших порядков, предполагая, что тензор давления — скаляр, в уравнении (5.25). Прежде чем перейти к исследованию уравнения (8.9), рассмотрим соотношение (5.60), выражающее закон сохранения энергии. Не нарушая общности, упростим задачу, предположив, что невозмущенное давление плазмы  $P_v$  связано с плотностью  $N$  адиабатическим законом  $P_v = = \text{const} N^{5/3}$ . Соотношение между возмущенными величинами непосредственно следует из выражения (5.60) и справедливо для всех точек в пространстве

$$\tilde{P}_v = \frac{5P_v}{3N} \tilde{n}_v. \quad (8.43)$$

Учитывая малость  $\tilde{L}_{с\text{ мин}}$  и используя уравнение (8.43), преобразуем выражение (8.9)

$$-\frac{\partial n_v}{\partial t} = \vec{x} \nabla \tilde{\Phi} + (\vec{u}_{Bv} + \vec{u}_f) \nabla n_v - \frac{\epsilon_v}{q_v} \nabla^2 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} - \frac{5}{6} \bar{a}_v^2 \nabla^2 \frac{\partial n_v}{\partial t}, \quad (8.44)$$

где

$$\epsilon_v = \frac{Nm_v}{B^2}, \quad \bar{a}_v^2 = \frac{\bar{W}_v^2}{\omega_v^2},$$

$$\vec{x} = \nabla \frac{N}{B^2} \times \vec{B}, \quad (8.45)$$

$$\vec{u}_{Bv} = \frac{10P_v}{3Nq_v B^3} \vec{B} \times \nabla B, \quad (8.46)$$

$$\vec{u}_f = \nabla P_i \times \frac{\vec{B}}{eNB^2}. \quad (8.47)$$

Здесь  $\vec{u}_{Bv}$  — скорость диамагнитного дрейфа. Скалярные произведения, в которых один из сомножителей есть любой вектор  $\nabla N$ ,  $\nabla B$  или  $\nabla P_v$ , а другой  $\vec{u}_{Bv}$  или  $\vec{u}_f$ , равны нулю.

Используя ранее введенную систему координат (см. рис. 8.2), можно получить уравнения для возмущенных величин, аналогичные уравнениям (8.32) и (8.33) для ионов

$$-\frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial t} = \kappa_z \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} + (u_{Biz} + u_{fz}) \frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial z} - \frac{\epsilon_i}{e} \nabla^2 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} - \frac{5}{6} \bar{a}_i^2 \nabla^2 \frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial t} \quad (8.48)$$

и для электронов

$$-\frac{\partial \tilde{n}_e}{\partial t} = \kappa_z \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} + (u_{Bez} + u_{fz}) \frac{\partial \tilde{n}_e}{\partial z}. \quad (8.49)$$

Используя уравнение (8.10), получаем при  $\epsilon_i \gg \epsilon_0$

$$\left[ \vec{\nabla}^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (u_{Biz} - u_{Bez}) \vec{\nabla}^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} + G_{ie} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] (\tilde{\Phi}, \tilde{n}_i, \tilde{n}_e) = 0, \quad (8.50)$$

где  $G_{ie} = -\omega_i (B^2/N) (u_{Biz} - u_{Bez}) (d/dr) (N/B^2)$ .

Считая, что возмущенные величины пропорциональны  $\exp[i(k_z z + \omega t)]$ , получим дисперсионное соотношение

$$\omega = -\frac{1}{2} k_z (u_{Biz} - u_{Bez}) [1 \pm (1 - \Gamma)^{1/2}], \quad (8.51)$$

где

$$\Gamma = \frac{4\omega_i B^2 (d/dr) (N/B^2)}{N k_z^2 (u_{Biz} - u_{Bez})} = \frac{6\omega_i e B^2}{5k_z^2 (P_i + P_e) N} \times \\ \times \left( \frac{dN/dr}{dB/dr} - 2 \frac{N}{B} \right). \quad (8.52)$$

Так как согласно предположению  $L_{c \text{ мин}} \ll L_{cN}$ , а  $L_{cB} = B/|dB/dr| = r$ , то из выражения (8.51) следует, что  $\omega$  почти не зависит от длины волны возмущения  $2\pi/k_z$ .

При  $r \rightarrow \infty$  мы переходим к плоской геометрии. В этом случае можно считать, что радиальная зависимость возмущения есть  $\exp(ik_r r)$ . При этом изменяется величина  $\Gamma$ , определяемая из формулы (8.52). Если исключить область вблизи оси симметрии, то это изменение сводится к тому, что  $k_z^2$  заменяется на  $(k_r^2 + k_z^2)$ . Из выражений (8.46), (8.51) и (8.52) следует, что при рассмотрении вопроса об устойчивости необходимо различать три случая.

1. Если  $dN/dr$  и  $dB/dr$  имеют противоположные знаки, то магнитное поле вогнуто в сторону плазмы, как в случае остроконечной геометрии (рис. 8.4, а и 8.2). Величина  $\Gamma$  при этом отрицательна и система устойчива относительно желобковых возмущений, что согласуется с результатом, полученным из простых энергетических соображений.

2. Если  $dN/dr$  и  $dB/dr$  имеют один и тот же знак и, кроме того,  $(d/dr) (N/B^2) > 0$ , то магнитное поле вогнуто в сторону вакуума, причем плотность меняется в пространстве гораздо быстрее  $B^2$  (пробкотрон, см. рис. 8.4, б или внешняя граница на рис. 8.2). Для ма-

лых ларморовских радиусов и малых дрейфовых скоростей  $u_{Biz} - u_{Bez}$  величина  $\Gamma$  становится большой и положительной ( $\Gamma > 1$ ). В этом случае система неустойчива. Однако при больших ларморовских радиусах  $\Gamma$  уменьшается и при  $k_z^2$  больше некоторой критической величины квадратный корень в уравнении (8.51) становится действительным. Механизм этой стабилизации аналогичен описанному в § 2.3. Единственное различие состоит в том, что в рассматриваемом случае дрейф обусловлен градиентом магнитного поля, а не силой тяжести.

3. Если  $dN/dr$  и  $dB/dr$  имеют один и тот же знак, но  $(d/dr) \cdot (N/B^2) < 0$ , то, хотя рассматриваемая геометрия пробочная (см. рис. 8.4, б и 8.2), теперь  $B^2$  нарастает гораздо быстрее, чем  $N$ . Величина  $\Gamma$  при этом отрицательна, следовательно, все рассматриваемые нами колебания устойчивы. Это следствие явления, описанного в начале данного параграфа: вещество движется поперек магнитного поля как за счет конвекции, так и из-за сжатия и растяжения. В рассматриваемом случае силы, приводящие к неустойчивости, ослаблены. Это особенно легко понять, рассмотрев частный случай, когда  $N/B^2 = \text{const}$  для всей плазмы. Тогда, взяв самый низкий порядок решения (6.13),  $\kappa$  и  $\Gamma$  согласно уравнению (8.45) тождественно обращаются в нуль. В нашем примере несущественно, как движется элемент плазмы, так как его плотность равна плотности плазмы в той точке, куда он сместился. Отсюда следует, что поверхности постоянной плотности остаются неподвижными, какие бы движения в плазме не происходили.

Следует отметить, что выражение (8.51) меняется при учете высших порядков, когда для тензора ионного давления используется более точное выражение (как, например, в § 2.5). Однако выводы относительно эффекта магнитного сжатия, который существует и при исчезающе малых ларморовских радиусах, не меняются.

Если локальное термодинамическое равновесие не успевает восстанавливаться за счет соударений, то полученные результаты несправедливы и спектр скоростей частиц будет меняться в пространстве и во времени в зависимости от диамагнитного дрейфа.

## 2. 7. Влияние кориолисовых сил

Очевидно, что любой эффект, приводящий к разделению зарядов, влияет на развитие желобковой неустойчивости. Рассмотрим влияние кориолисовых сил на развитие неустойчивости во вращающейся плазме. Влияние сил Кориолиса сводится к тому, что ионам приходится двигаться в магнитном поле, слегка отличающемся от поля, действующего на электроны. Следовательно, наряду с разделением зарядов, связанным с дрейфом под действием внешних сил и инерционным дрейфом, будет происходить дополнительное разделение зарядов.

Пусть однородное магнитное поле направлено вдоль оси вращения, а ларморовские радиусы очень малы. Преобразуем уравнение (8.9)

$$\begin{aligned}
 -\Lambda_\nu \frac{\partial n_\nu}{\partial t} = \Lambda_\nu \operatorname{div}(n_\nu \vec{v}_\nu) = -[\vec{\nabla} \tilde{\Phi} \times \vec{B}/B^2] \cdot \vec{\nabla} n_\nu + \\
 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_\nu} - \frac{1}{\omega_i} \right) \cdot [\vec{\nabla}(\vec{\Omega} \times \vec{\rho})^2 \times \vec{B}] \cdot \vec{\nabla} n_\nu - \\
 - \frac{1}{\omega_\nu \Lambda_\nu B} \operatorname{div} \left( N \vec{\nabla} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} \right), \quad (8.53)
 \end{aligned}$$

где  $\Omega$  может иметь любой знак, а

$$\Lambda_\nu = 1 + 2\Omega/\omega_\nu, \quad \nu = i, e. \quad (8.54)$$

Если сделать дополнительные предположения, что  $\epsilon_i = m_i N/B^2 \gg \epsilon_0$ , плазма квазинейтральна и пренебречь  $m_e$  по сравнению с  $m_i$ , то, комбинируя уравнения (8.53), записанные для ионов и электронов, получаем

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \left( N \vec{\nabla} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} \right) + 2\Omega \Lambda_i \left( \vec{B} \times \vec{\nabla} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} \right) / \vec{\nabla} N + \\
 + \Omega^2 (\vec{\rho} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla} \left[ \Lambda_i (\vec{B} \times \vec{\nabla} \tilde{\Phi}) \cdot \vec{\nabla} N - \right. \\
 \left. - \operatorname{div} \left( \frac{N}{\omega_i} \vec{\nabla} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} \right) \right] = 0. \quad (8.55)
 \end{aligned}$$

Такие уравнения справедливы в том случае, когда характерные размеры изменения параметров много больше длины волны возмущения. Сначала рассмотрим случай, когда операторы, действующие на  $n$ , и  $\tilde{\Phi}$  в уравнении (8.53), не обращаются в нуль каждый в отдельности.

Пусть  $\tilde{\Phi} \sim v^n \exp[i(m_\varphi \varphi + \omega t)]$ , где  $n$  — константа. Тогда дисперсионное соотношение

$$\left(1 - \frac{n^2}{n_\varphi^2} - \frac{nrN'}{Nm_\varphi^2}\right) \omega^2 + \left[\left(1 - \frac{n^2}{m_\varphi^2}\right) m_\varphi \frac{\Omega^2}{\omega_i} + 2\Omega \Lambda_i \frac{rN'}{Nm_\varphi} - n \frac{\Omega^2}{\omega_i} \frac{rN'}{Nm_\varphi}\right] \omega - \Omega^2 \Lambda_i r \frac{N'}{N} = 0; \quad (8.56)$$

здесь  $N' \equiv dN/dr$ . Заметим, что дисперсионное соотношение не зависит от  $r$ , если  $N = \text{const } r^{\text{const}}$ .

В практически интересных случаях угловая частота  $\Omega$  много меньше  $\omega_i$ . При этом получим дисперсионное соотношение

$$\omega \left(1 - \frac{n^2}{m_\varphi^2}\right) / \Omega = - \frac{rN'}{Nm_\varphi} \pm \left[ \left(\frac{rN'}{Nm_\varphi}\right)^2 + \frac{rN'}{N} \left(1 - \frac{n^2}{m_\varphi^2} - n \frac{rN'}{Nm_\varphi^2}\right) \right]^{1/2}. \quad (8.57)$$

Здесь первый член в правой части равенства и первое слагаемое под корнем связаны с кориолисовыми силами, последнее же слагаемое под корнем возникает благодаря действию центробежной силы. Рассмотрим три случая.

**1.  $n=0$ .** Возмущение представляет собой желобок в радиальном направлении, не зависящий от  $r$ . Из уравнения (8.57) следует, что плазма устойчива при  $r > -m_\varphi^2 N/N'$ . При заданном значении  $m_\varphi$  это неравенство выполняется лишь для достаточно больших значений градиента плотности  $N'$ . Благодаря действию кориолисовых сил происходит стабилизация неустойчивости, так как эти силы приводят к разделению зарядов, противодействующему разделению зарядов из-за центробежной силы.

**2.  $n = m_\varphi$ .** В этом частном случае в выражении



(8.57) исчезают все члены, не содержащие  $N'$ . Из полученного таким образом дисперсионного соотношения  $\omega/\Omega = -1 \pm (1 - m_\phi)^{1/2}$  следует, что неустойчивость возникает для всех значений  $m_\phi > 1$  [72, 176]. Стабилизирующее действие кориолисовых сил описывается в этом дисперсионном соотношении единицей в выражении  $1 - m_\phi$ . Однако этот эффект теперь слишком мал по сравнению с раскачкой, которая определяется величиной  $m_\phi$ .

3.  $n \neq 0$ ,  $m_\phi \neq 0$ ,  $n \neq m_\phi$ . Знак подкоренного выражения в дисперсионном соотношении (8.57) зависит от величины и знака следующих выражений:  $rN'/Nm_\phi^2$ ,  $n^2/m_\phi^2$  и  $n$ . В этом случае существуют как устойчивые, так и неустойчивые типы колебаний.

Таким образом, мы показали, что кориолисовы силы стабилизируют желобковую неустойчивость, однако эффект стабилизации слишком мал, чтобы сделать устойчивыми все типы колебаний. Для более детального исследования этой проблемы необходимо рассмотреть задачи с граничными условиями.

## 2. 8. Заключение

Итак, достаточным условием устойчивости в рассмотренных задачах является требование, чтобы магнитное поле было вогнуто в сторону плазмы, т. е. центробежная сила и сила тяжести должны быть направлены противоположно градиенту плотности. Это условие получено при детальном изучении движения плазмы. Его можно получить также из энергетических соображений.

Когда магнитные силовые линии вогнуты в сторону вакуума или центробежная сила и сила тяжести направлены в ту же сторону, что и градиент плотности, плазма будет устойчива лишь при определенных условиях. При помощи простых энергетических соображений можно показать, что в этом случае выполняется необходимое условие для существования неустойчивости. Однако это условие не всегда является достаточным, так как нужно еще показать, что частицы могут совершать движение, в результате которого потенциальная энергия системы уменьшается. Именно это об-

стоятельство учитывается в строгой теории, основанной на энергетическом принципе, в которой учтены также уравнения движения.

Мы рассмотрели факторы, приводящие к уменьшению инкремента желобковой неустойчивости для некоторой области волновых чисел, а иногда даже к стабилизации системы для всех возможных волновых чисел. Скорость нарастания амплитуды колебаний при неустойчивости можно значительно уменьшить за счет эффекта конечности градиента плотности, эффектов Холла, конечности ларморовского радиуса, эффекта магнитного сжатия, разделения зарядов из-за кориолисовых сил и, наконец, за счет shear магнитного поля. В дополнение к этим явлениям, обусловленным свойствами плазмы, существуют также эффекты, связанные с проводимостью стенок. При этом короткозамкнутые токи, текущие поперек магнитного поля, на торцах пробкотрона могут привести к перемещению зарядов вдоль магнитных силовых линий и стабилизировать желобковую неустойчивость [168, 177]. Наконец, невозмущенное электрическое поле может сделать существенными эффекты ларморовского радиуса, влияющие на желобковую неустойчивость [178].

В действительности очень сложно провести детальное сравнение теории с экспериментом. Это, по-видимому, связано с тем, что на опыте существенную роль играет устойчивость внутренней части плазмы относительно желобковых возмущений. В этом отношении представляет интерес изучение радиационных поясов Ван Аллена [131]. Эти пояса образованы заряженными частицами, захваченными магнитным полем Земли (см. рис. 7.5). Согласно результатам, полученным из наблюдений, эти пояса стабильны. Для объяснения этого явления необходимо предположить, что пространственные заряды, возникающие при желобковых возмущениях, перемещаются вдоль магнитных силовых линий, а возникшие вследствие этого токи накоротко замыкаются через ионосферу, которая здесь играет роль проводящих торцов в пробкотроне [177].

Другое объяснение можно получить, используя результаты раздела 2.6 этой главы. Если величина  $|\vec{\nabla} B/B|$  равна по крайней мере половине величины  $|\vec{\nabla} n/n|$ , то система становится устойчивой для всех

волновых чисел в направлении поперек магнитного поля. Для частиц, образующих пояса Ван Аллена, стенки вблизи выпуклой границы плазмы отсутствуют. Поэтому можно считать, что приведенное условие устойчивости  $\frac{B}{|\vec{\nabla}B|} < 2 \frac{N}{|\vec{\nabla}N|}$  выполняется на внешней границе, когда магнитное поле быстро падает в радиальном направлении.

Для лабораторных экспериментов положение несколько отличается от описанного, так как плазма должна удерживаться внутри сосуда конечных размеров. Плотность плазмы во внешней области спадает гораздо быстрее, чем удерживающее магнитное поле, и величина  $L_{CN}$  приближается к нулю на границе плазмы. Это относится к пробкотронам и подобным им установкам.

В этом случае можно добиться устойчивости или хотя бы уменьшения инкремента неустойчивости при помощи только что рассмотренных механизмов стабилизации. Следует также отметить, что инкремент неустойчивости можно уменьшить, выбрав определенным образом экспериментальные условия, если даже  $L_{CN}$  обращается в нуль на стенке сосуда или на поверхности электрода. Это происходит во вращающейся плазме, которая имеет контакт с поверхностью электрода, где из-за вязкости скорость жидкости на поверхности электрода обращается в нуль. Угловая скорость вращения в этом случае уже не постоянна в пространстве. Она создаст некоторый эквивалент неоднородного поля силы тяжести  $g = \Omega^2 r$ , которое обращается в нуль на поверхности электрода.

Для проблемы устойчивости этот случай соответствует обращению  $N$  и  $g$  одновременно в нуль на границе плазмы (см. § 2.4). Подобно этому можно ожидать уменьшения инкремента неустойчивости в плазме, температура которой обращается в нуль на границе, например на металлической стенке. Это соответствует случаю, когда  $P_i$ ,  $P_e$  и  $N$  стремятся к нулю при приближении к границе плазмы (см. § 2.6).

Экспоненциальная скорость роста возмущения во времени, предсказываемая линейной теорией, наводит на мысль, что частицы покидают ловушку, двигаясь по-

перек магнитного поля со скоростью, примерно равной тепловой. Например, для водородной плазмы с температурой  $10^6$  К эта скорость имеет величину порядка  $10^5$  м/сек. Поэтому частицы должны покинуть ловушку за время порядка нескольких микросекунд. Однако время удержания плазмы во многих экспериментальных установках в несколько сот раз больше. Хотя причина такого расхождения полностью не понята, можно предположить, что описанные выше механизмы стабилизации могут сильно увеличить время удержания. Следует также помнить, что мы оцениваем время удержания при помощи линейной теории. Точный учет нелинейных эффектов может также значительно изменить время удержания.

### § 8. 3. ВИНТОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Мы видели, что разделение зарядов при желобковой неустойчивости происходит из-за дрейфовых движений в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Однако разделение зарядов может произойти и при движении ионов относительно электронов вдоль магнитных силовых линий. Это в свою очередь приведет к появлению электрического поля, а затем и дрейфа частиц поперек магнитного поля.

Теоретическое исследование такого явления для слабоионизованной плазмы впервые проведено в работах [179, 180]. Результаты исследования хорошо согласуются с ранее наблюдаемой неустойчивостью плазмы положительного столба [181, 182]. Механизм неустойчивости можно понять, рассмотрев винтовые возмущения плотности вдоль магнитных силовых линий [183] (рис. 8.7). Предположим, что столб плазмы с градиентом плотности  $dN/dr < 0$  помещен в однородное магнитное поле, направленное вдоль оси  $z$ . В начальном состоянии плазма электрически нейтральна. Возникающие возмущения плотности характеризуются тем, что амплитуды смещения ионов и электронов одинаковы. В следующее мгновение электроны и ионы начинают двигаться вдоль магнитного поля с разными скоростями, так как имеется электрическое поле  $E_{0z}$ . Это немедленно приводит к разделению зарядов. Таким образом, смещение «электронного винта» в положительном на-

правлении оси  $z$  эквивалентно вращению электронного винта в положительном направлении относительно ионного винта. Это приводит к возникновению возмущенного электрического поля  $\vec{E}_\phi$  и дрейфа  $\vec{E}_\phi \times \vec{B}/B^2$  в радиальном направлении наружу, если винт имел указанное направление. Таким образом, электрический дрейф приводит в движение всю массу плазмы, кото-

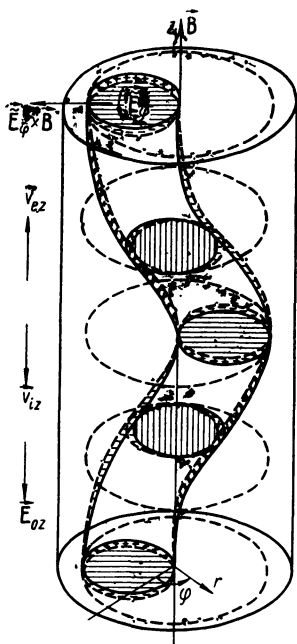


Рис. 8.7. Неустойчивость при левовинтовом возмущении, т. е. при  $m_\phi = 1$ . Возмущение плотности ионов имеет вид винта (сплошные линии); соответствующее распределение электронов показано пунктиром. Области пересечения заштрихованы и соответствуют положению винтов относительно оси  $z$ . Благодаря движению электронов и ионов вдоль магнитных силовых линий со скоростями  $v_{ez}$  и  $v_{iz}$  соответственно пространственный заряд образуется в области, где распределения электронов и ионов не перекрываются [184].

рая вращается с нарастающим эксцентриситетом относительно оси. При этом возмущение плотности нарастает, и плазма будет уходить из ловушки по радиусу.

Только что описанный механизм имеет много общего с желобковой неустойчивостью (см. § 2). Единственное отличие состоит в том, что разделение зарядов происходит из-за продольного, а не поперечного движения.

Такие же явления могут иметь место и в полностью ионизованной плазме. Разделение зарядов происходит из-за перемещения поверхности постоянной плотности

[слагаемое  $\vec{v}_{\parallel} \cdot \vec{\nabla} n$  в уравнении (5.62)]. Однако этот эффект не единственный, так как существуют еще эффекты сжатия в продольном направлении, которые влияют на скорость изменения ионной и электронной плотностей [последнее слагаемое выражения (5.62)]. При наличии возмущенного продольного электрического поля  $\vec{E}_z$  в отсутствие кулоновских столкновений электроны и ионы будут ускоряться по-разному, двигаясь вдоль магнитных силовых линий. При этом пространственное разделение зарядов сильно меняется из-за эффектов продольного сжатия, поэтому этот случай уже не так прост, как изображенный на рис. 8.7. Следует также отметить, что учет даже небольшого электрического поля, направленного вдоль магнитных силовых линий, сильно усложняет задачу. Поэтому необходимо тщательно исследовать все сделанные приближения. Подробное обсуждение таких проблем для полностью ионизованной плазмы конечной проводимости здесь не рассматривается.

**РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ**

В этой главе приведены только некоторые наиболее важные результаты, касающиеся движения отдельных частиц. Основы специальной теории относительности даны в учебниках [184—187].

**§ 9. 1. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ  
И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ**

Теория относительности основывается на том факте, что скорость света есть инвариант, не зависящий от системы отсчета. Свет можно рассматривать как электромагнитные волны, поэтому следует ожидать, что законы электродинамики будут согласовываться с требованиями теории относительности.

**1. 1. Преобразования Лоренца**

Прямым следствием инвариантности скорости света являются преобразования Лоренца. Рассмотрим систему отсчета  $S$ , в которой положение в пространстве определяется вектором  $\rho$ , а  $t$  обозначает время. В другой системе отсчета  $S'$ , движущейся относительно первой со скоростью  $\vec{\omega}_0$ , вектор положения обозначим  $\rho'$ . Согласно требованиям специальной теории относительности свет распространяется с одной и той же скоростью  $c$  в обеих системах координат. Это возможно лишь, когда при переходе от одной системы координат к другой меняется время. Следовательно, необходимо ввести время  $t'$  в движущейся системе координат, отличное от  $t$ . В результате получаем преобразования Лоренца:

$$\vec{\rho}' = \vec{\rho} + (\gamma - 1) \frac{\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\rho}}{\omega_0} \vec{\omega}_0 - \gamma \vec{\omega}_0 t, \quad (9.1)$$

$$t' = \gamma \left( t - \vec{\omega}_0 \cdot \frac{\rho}{c^2} \right), \quad (9.2)$$

где

$$\gamma(\omega_0) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{c^2}\right)^{1/2}}. \quad (9.3)$$

Для простоты предположим, что системы координат совпадают при  $t=0$ . Если  $x$  обеих систем направлены вдоль вектора  $\omega_0$ , преобразования принимают следующий вид:

$$x' = \gamma(x - \omega_0 t), \quad y' = y, \quad z' = z \quad (9.4)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\omega_0 x}{c^2}\right), \quad (9.5)$$

где  $\omega_0 \equiv \omega_{0x}$  может быть положительным и отрицательным.

Из выражений (9.1) и (9.2) можно получить соотношения между скоростями  $\vec{\omega} = d\vec{\rho}/dt$  и  $\vec{\omega}' = d\vec{\rho}'/dt'$  в обеих системах координат

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\rho}'}{dt} = \frac{d\vec{\rho}'}{dt'} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{\vec{\omega} + (\gamma - 1) \frac{\widehat{\omega}_0 \cdot \vec{\omega}}{\omega_0} \vec{\omega}_0 - \gamma \vec{\omega}_0}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\omega}}{c^2}\right)}. \quad (9.6)$$

Из этого выражения можно легко получить известный закон сложения релятивистских скоростей, направив ось  $x$  вдоль  $\omega_0$ .

Согласно теории Минковского [188], пространство и время можно рассматривать как единый четырехмерный континуум, т. е.

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict. \quad (9.7)$$

При этом преобразования Лоренца примут следующий вид:

$$x'_1 = x_1 \cos \eta - x_4 \sin \eta, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad (9.8)$$

$$x'_4 = x_1 \sin \eta + x_4 \cos \eta, \quad (9.9)$$

где

$$\operatorname{tg} \eta = -i \frac{\omega_0}{c}, \quad \cos \eta = \gamma(\omega_0), \quad \sin \eta = -i \gamma(\omega_0) \frac{\omega_0}{c}. \quad (9.10)$$



Отсюда видно, что преобразования Лоренца являются преобразованиями вращения в прямоугольной системе координат  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , причем  $\eta$  играет роль мнимого угла вращения.

## 1. 2. Электрические заряды и токи

Источниками электромагнитных полей являются электрические заряды и их движение. Поэтому начнем исследование с выяснения поведения плотности тока и заряда при преобразованиях Лоренца.

Предположим, что электрические заряды плотностью  $\sigma$  движутся со скоростью  $\omega$  относительно системы отсчета  $S$ . В системе  $S'$ , движущейся со скоростью  $\omega_0$  относительно системы  $S$ , плотность заряда будет  $\sigma'$  и скорость движения  $\vec{\omega}'$ . Введем вспомогательную систему координат  $S''$ , которая движется вместе с зарядами, т. е. в этой системе скорость движения зарядов  $\omega'' = 0$ , а их плотность  $\sigma''$ . Рассмотрим некоторое количество заряженных частиц, занимающих определенный элемент объема. Обозначим этот элемент в системе  $S''$  как  $dV''$ . Заряд, содержащийся внутри этого элемента, равен  $\sigma'' dV''$ . Наблюдатель в системе  $S''$  видит системы  $S$  и  $S'$  движущимися со скоростями  $-\vec{\omega}$  и  $\vec{\omega}'$  соответственно. В системе  $S$  и  $S'$  одни и те же частицы занимают элементы  $dV$  и  $dV'$  соответственно. Согласно преобразованиям Лоренца (9.4) происходит сокращение наблюдаемого элемента объема в направлении его относительного движения. Если воспользоваться этим при переходе от системы  $S''$  к системе  $S$  и от системы  $S'$  к системе  $S$ , то получим

$$dV = \frac{dV''}{\gamma(\omega)}, \quad dV' = \frac{dV''}{\gamma(\omega')}. \quad (9.11)$$

Направив ось  $x$  вдоль  $\omega_0$ , можно легко получить при помощи соотношения (9.6) выражение для  $\omega'^2$ , из которого следует

$$\gamma(\omega') = \gamma(\omega) \gamma(\omega_0) \left(1 - \omega_x \frac{\omega_0}{c^2}\right). \quad (9.12)$$

Так как мы выбрали элементы объемов такими, чтобы они содержали одно и то же число частиц, то  $\sigma'' dV'' =$

$= \sigma dV = \sigma' dV'$ . Комбинируя эти уравнения с соотношениями (9.11) и (9.12), получаем

$$\sigma' = \gamma(\omega_0) \left( \sigma - \omega_0 \sigma \frac{\omega_x}{c^2} \right). \quad (9.13)$$

В этом случае, если рассматривались частицы разного сорта, находим выражения для плотности тока и заряда

$$j = \sum_y \sigma_y \omega_y, \quad \sigma = \sum_y' \sigma_y \quad (9.14)$$

в системе  $S$ . Подобные соотношения справедливы также для системы  $S'$ . Из соотношений (9.6), (9.13) и (9.14) окончательно имеем

$$j_x = \gamma(\omega_0) (j_x - \omega_0 \sigma), \quad j'_y = j_y; \quad j'_z = j_z, \quad (9.15)$$

$$\sigma' = \gamma(\omega_0) \left( \sigma - \frac{\omega_0 j_x}{c^2} \right). \quad (9.16)$$

Следует отметить, что плотность заряда зависит от того, в какой системе отсчета она измеряется. Это происходит не только из-за лоренцовского сокращения (множитель  $\gamma$ ) в правой части равенства (9.16), но также из-за последнего слагаемого в правой части, содержащего  $j_x$ . Физический смысл появления этого члена состоит в том, что ионы и электроны при протекании тока  $j_x$  движутся с различными скоростями, т. е. лоренцовское сжатие для ионов отличается от лоренцовского сжатия для электронов. Следовательно, отличаются плотности ионов и электронов, т. е. возникает пространственный заряд  $-\gamma(\omega_0) \omega_0 j_x / c^2$ . Этот эффект важен не только при релятивистских скоростях, когда  $\gamma(\omega_0)$  значительно отличается от единицы. Как было показано в работе [189], этот эффект следует учитывать даже для довольно медленных частиц при рассмотрении расширения плазмы, движущейся в магнитном поле. В плотной квазинейтральной плазме даже небольшая разница между очень малыми по величине лоренцовскими сокращениями ионов и электронов приводит к появлению пространственных зарядов и заметных электрических полей.

Сравнивая равенства (9.15) и (9.16) с соотношениями (9.4) и (9.5), получаем, что  $\vec{j}$  и  $\sigma$  при преобразова-

нии систем отсчета ведут себя соответственно как пространственные координаты и время  $t$ , поэтому  $\vec{j}$ ,  $ics$  преобразуется подобно координатам в четырехмерном пространстве, т. е. является четырехмерным вектором.

### 1. 3. Тензор электромагнитного поля

Как было показано в гл. 2, мы можем определить векторный потенциал магнитного поля  $A$  и скалярный потенциал  $\varphi$  при помощи  $\vec{j}$  и  $\sigma$ . Операторы  $\partial/\partial x_\nu$  преобразуются как компоненты четырехмерного вектора. Поэтому из соотношений (9.7) следует, что оператор  $\vec{\nabla}^2 - (1/c^2)\partial^2/\partial t^2$  остается инвариантным при преобразованиях Лоренца. Отсюда, воспользовавшись уравнениями (2.17) и (2.18), можно показать, что  $A$  и  $\varphi$  преобразуются так же, как  $\vec{j}$  и  $\sigma$ . Поэтому величина

$$(A_\nu) = \left( \vec{A}, i \frac{\varphi}{c} \right) \quad (9.17)$$

есть также четырехмерный вектор.

В четырехмерном пространстве введем тензор электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = -F_{\nu\mu}. \quad (9.18)$$

В этих обозначениях  $\nu=1, 2, 3$  соответствует уравнениям Максвелла (2.8), а  $\nu=4$  — уравнению 2.10). Из соотношений (9.7) и (9.18) следует явное выражение для  $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c} E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c} E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{i}{c} E_z \\ \frac{i}{c} E_x & \frac{i}{c} E_y & \frac{i}{c} E_z & 0 \end{array} \right\}. \quad (9.19)$$

Преобразования координат и их разностей (9.8) и (9.9) можно сокращенно записать в следующем виде:

$$x'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu, \quad (9.20)$$

где  $a_{\mu\nu}$  — коэффициенты преобразования. Из соотношений (9.17) и (9.18) непосредственно следует, что соответствующее преобразование для тензора электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$  определяется формулой

$$F'_{jk} = \sum_\mu \sum_\nu a_{j\mu} a_{k\nu} F_{\mu\nu}. \quad (9.21)$$

Формулы из соотношений (9.10), (9.19)—(9.21) удобно записать в виде

$$\vec{E}' = \gamma \vec{E} - (\gamma - 1) (\hat{\omega}_0 \cdot \vec{E}) \hat{\omega}_0 + \gamma \vec{\omega}_0 \times \vec{B}, \quad (9.22)$$

$$\vec{B}' = \gamma \vec{B} - (\gamma - 1) (\hat{\omega}_0 \cdot \vec{B}) \hat{\omega}_0 - \gamma \vec{\omega}_0 \times \frac{\vec{E}}{c^2}, \quad (9.23)$$

где  $\gamma = \gamma(\omega_0)$ .

## § 9.2. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Законы электродинамики согласуются с требованиями теории относительности. Построение релятивистской механики удобно начать с описания влияния электромагнитного поля на движение заряженной частицы. Следуя Клейну [190], введем инерциальную систему отсчета  $S$ , в которой частица имеет скорость  $\omega(t_0) = \omega_0$  в заданный момент времени  $t = t_0$ . Введем далее систему  $S'$ , движущуюся относительно  $S$  с постоянной скоростью  $\vec{\omega}_0$ . Таким образом, скорость частицы в системе  $S'$  равна нулю только в момент времени  $t_0$ .

Не нарушая общности, можно считать, что обе системы совпадают при  $t = t' = 0$ , и положить  $t_0 = t'_0 = 0$ .

Так как скорость частицы  $\omega' = 0$  при  $t' = 0$ , то в системе  $S'$  в этот момент времени справедлив закон Ньютона

$$m \frac{d\vec{\omega}'}{dt} = q \vec{E}', \quad t = t' = 0. \quad (9.24)$$

Вопрос заключается в том, каким будет это соотношение для величин, измеренных в системе  $S$ . Для этого необходимо связать ускорение  $\vec{d}\omega'/dt'$  в системе  $S'$  с соответствующим ускорением  $d\omega/dt$  в системе  $S$ , которая движется относительно  $S'$  с постоянной скоростью  $\omega_0$ . Используя соотношения (9.2) и (9.6), получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{\omega}'}{dt}\right)_{t'=0} &= \left(\frac{d\vec{\omega}'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt}\right)_{t'=0} = \\ &= \gamma^2 \left[ \frac{d\omega}{dt} + (\gamma - 1) \left( \hat{\omega}_0 \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) \hat{\omega}_0 \right]_{t'=0}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Здесь мы положили  $\omega'(0) = 0$ . Подобный вывод можно проделать для любого момента времени  $t_0$  и любой скорости  $\vec{\omega}(t_0)$ . Комбинируя равенства (9.22), (9.24) и (9.25), в результате получаем уравнение движения

$$\begin{aligned} m\gamma^2 \left[ \frac{d\vec{\omega}}{dt} + (\gamma - 1) \left( \hat{\omega} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) \hat{\omega} \right] = \\ = q [\gamma E - (\gamma - 1) (\hat{\omega} \cdot \vec{E}) \hat{\omega} + \gamma \vec{\omega} \times \vec{B}], \end{aligned} \quad (9.26)$$

где  $\gamma = \gamma(\omega)$ . Умножив это уравнение скалярно на  $\hat{\omega}$ , получим

$$m\gamma^3 \hat{\omega} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = q \hat{\omega} \cdot \vec{E}. \quad (9.27)$$

Это уравнение является релятивистской аналогией уравнения (2.38), определяющего изменение энергии во времени.

Подставляя уравнение (9.27) и соотношение

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2} \cdot \vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

в уравнение (9.26), после несложных преобразований получим

$$m \frac{d}{dt} (\gamma \vec{\omega}) = \frac{d}{dt} \vec{P} = q (\vec{E} + \vec{\omega} \times \vec{B}). \quad (9.28)$$

Полученное соотношение — релятивистское уравнение движения [сравни с уравнением (2.36)]. Здесь  $\vec{P} = m\vec{v}$  представляет собой импульс. Уравнение (9.27) можно также переписать в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\vec{\omega} \cdot \vec{E}, \quad \mathcal{E} = \gamma mc^2, \quad (9.29)$$

где  $\mathcal{E}$  — релятивистская энергия.

Вернемся теперь к четырехмерному пространству, введенному в разделах 1.2 и 1.3. Определим собственное время как

$$dr = \left[ (dt)^2 - \frac{(d\rho)^2}{c^2} \right]^{1/2} = \frac{dt}{\bar{\gamma}}. \quad (9.30)$$

Эту величину можно также рассматривать как меру длины дуги, по которой движется конец вектора положения в четырехмерном пространстве, так как

$$\sum_{\nu} (dx_{\nu})^2 = -c^2 d\tau^2. \quad (9.31)$$

Поэтому она остается инвариантной при преобразовании координат. Таким образом определим четырехмерную скорость

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \left( \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau}, \quad ic \frac{dt}{d\tau} \right) = (\gamma\vec{\omega}, \quad ic\gamma). \quad (9.32)$$

Можно также ввести четырехмерный вектор импульса  $(\vec{P}, i\mathcal{E}/c)$  при помощи соотношений (9.19) и (9.32). Уравнения сохранения импульса и энергии (9.28) и (9.29) можно объединить в одно

$$in \frac{d^2 x_{\nu}}{d\tau^2} = q \sum_{\mu} F_{\mu\nu} \frac{dx_{\mu}}{d\tau}, \quad \nu = (1, 2, 3, 4). \quad (9.33)$$

Заметим, что система четырех уравнений переопределена, так как уравнение при  $\nu=4$  соответствует закону сохранения энергии, который следует из остальных трех уравнений при  $\nu=1, 2, 3$  [обозначения такие же, как в соотношении (9.7)].

### **§ 9. 3. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ**

Приведем лишь два простых примера точного решения уравнений движения, которые тесно связаны с задачами разделов 2.2 и 2.4.

#### **3. 1. Магнитоэлектростатические поля**

В отсутствие электрического поля, когда частица движется в магнитном поле, постоянном во времени, правая часть уравнения (9.29) обращается в нуль. Следовательно, энергия  $\epsilon$ , а также модуль скорости  $\omega$  и  $\gamma$  — константы движения. Единственное отличие от нерелятивистского случая состоит в том, что массу частицы  $m$  следует заменить «релятивистской массой». После такой замены все результаты, ранее полученные при решении точного уравнения движения в магнитоэлектростатическом поле, сохраняют свою силу. В частности, сохраняются результаты разделов 4.2 и 4.3 гл. 2, касающиеся определения границ запрещенных областей и движения частицы в полях монополя, диполя, линейного тока, а также в гиперболическом поле.

Так как релятивистская частица движется точно так же, как нерелятивистская частица массы  $\gamma m$ , результаты, полученные с помощью теории возмущений, можно непосредственно применять к нерелятивистским частицам. Так, если  $\vec{W}$  — скорость вращения в лабораторной системе координат, то радиус вращения равен  $\gamma m W / |q| B$ , а магнитный момент  $\gamma m W^2 / 2B$ .

Если кроме магнитного поля на частицу действует также электрическое поле, то  $\gamma$  и  $\omega$  перестают быть константами и теорию возмущений нужно строить заново так, как указано в § 9.4.

#### **3. 2. Однородные статические магнитное и электрическое поля**

Теперь рассмотрим задачу о релятивистском движении частицы в однородных магнитном и электрических полях, не зависящих от времени (ср. § 4.1 гл. 2). Так как тензор электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$  не зависит от

времени, то, следуя работам [65, 66], можно искать решение уравнения (9.33) в виде  $\exp(\text{const} \cdot \tau)$ . Подставляя выражение (9.19) в уравнение (9.33), находим корни характеристического уравнения.

Общее решение имеет вид

$$x_\nu = \xi_\nu a \cos \omega \tau - \eta_\nu a \sin \omega \tau + d_\nu b \operatorname{ch} \lambda \tau - \beta_\nu b \operatorname{sh} \lambda \tau + X_{\nu 0}, \quad (9.34)$$

где

$$\omega, \lambda = \frac{a}{m} \left\{ \pm \frac{1}{2} \left( B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) + \frac{1}{2} \left[ \left( B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right)^2 + 4 \frac{(E-B)^2}{c^2} \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (9.35)$$

Здесь  $\omega$  соответствует знаку плюс, а  $\xi_\nu, \eta_\nu, \alpha_\nu, \beta_\nu, a, b$  и  $X_{\nu 0}$  — константы. Мы увидим, что в качестве взаимно ортогональных единичных векторов можно выбрать  $\xi_\nu, \eta_\nu, \alpha_\nu$  и  $\beta_\nu$ .

Величина  $a$  в уравнении (9.34) связана с той частью четырехмерного вектора  $x_\nu$ , которая вращается с частотой  $\omega$  в пространстве  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Поэтому  $a$  можно рассматривать как обобщенный ларморовский радиус при движении в четырехмерном пространстве. Частица при этом вращается вокруг магнитных силовых линий по окружности, радиус которой можно получить, спроектировав четырехмерную орбиту на трехмерное пространство. Величина  $a$ , входящая в соотношение (9.34), в нерелятивистском пределе принимает значение, определяемое формулой (2.81). Подставив соотношение (9.34) в уравнение (9.33), убедимся теперь, что  $\xi_\nu, \eta_\nu, \alpha_\nu$  и  $\beta_\nu$  можно выбрать в качестве ортогональных единичных векторов. Приравнивая члены, одинаково зависящие от  $\tau$ , получаем

$$\omega \xi_\nu = \frac{q}{m} \sum_\mu F_{\nu\mu} \eta_\mu, \quad \omega \eta_\nu = -\frac{q}{m} \sum_\mu F_{\nu\mu} \xi_\mu \quad (9.36)$$

и

$$\lambda \alpha_\nu = -\frac{q}{m} \sum_\mu F_{\nu\mu} \beta_\mu, \quad \lambda \beta_\nu = -\frac{q}{m} \sum_\mu F_{\nu\mu} \alpha_\mu. \quad (9.37)$$



Используя антисимметрию тензора  $F_{\mu\nu}$  [см. определение (9.18)], из уравнения (9.36) получаем

$$\omega \sum_{\nu} \xi_{\nu} \eta_{\nu} = \frac{q}{m} \sum_{\nu} \sum_{\mu} F_{\nu\mu} \eta_{\mu} \eta_{\nu} = 0. \quad (9.38)$$

Аналогичный результат получается для  $\alpha_{\nu}$ ,  $\beta_{\nu}$ . Далее из уравнений (9.36) и (9.37) следует

$$\omega \sum_{\nu} \xi_{\nu} \alpha_{\nu} = \frac{q}{m} \sum_{\nu} \sum_{\mu} F_{\nu\mu} \eta_{\mu} \alpha_{\nu} = -\lambda \sum_{\nu} \beta_{\nu} \eta_{\nu}, \quad (9.39)$$

$$\omega \sum_{\nu} \eta_{\nu} \beta_{\nu} = \lambda \sum_{\nu} \alpha_{\nu} \xi_{\nu}, \quad (9.40)$$

$$\omega \sum_{\nu} \xi_{\nu} \alpha_{\nu} = -\frac{\lambda^2}{\omega} \sum_{\nu} \alpha_{\nu} \xi_{\nu} = \frac{\lambda^3}{\omega^2} \sum_{\nu} \beta_{\nu} \eta_{\nu}. \quad (9.41)$$

Эти уравнения удовлетворяют лишь в том случае, если

$$\sum_{\nu} \xi_{\nu} \alpha_{\nu} = \sum_{\nu} \beta_{\nu} \eta_{\nu} = 0. \quad (9.42)$$

Наконец из уравнения (9.36) получаем

$$\omega \sum_{\nu} \xi_{\nu} \xi_{\nu} = \frac{q}{m} \sum_{\nu} \sum_{\mu} F_{\nu\mu} \eta_{\mu} \xi_{\nu} = \omega \sum_{\nu} \eta_{\nu} \eta_{\nu}, \quad (9.43)$$

а из уравнения (9.37) следует подобное выражение для  $\alpha_{\nu}$  и  $\beta_{\nu}$ . Из соотношений (9.38) и (9.42) можно заключить, что векторы  $\xi_{\nu}$ ,  $\eta_{\nu}$ ,  $\alpha_{\nu}$  и  $\beta_{\nu}$  ортогональны между собой. Определим теперь  $a$  и  $b$  таким образом, чтобы они представляли собой амплитуды решения. При этом в соответствии с соотношением (9.43) векторы  $\xi_{\nu}$ ,  $\eta_{\nu}$ ,  $\alpha_{\nu}$  и  $\beta_{\nu}$  можно считать единичными. Случай, когда  $\omega$  или  $\lambda$  обращаются в нуль, следует рассматривать особо, ибо не очевидно, что проведенный анализ справедлив при  $\omega=0$  или  $\lambda=0$ .

В заключение исследуем два случая.

1. Электрическое поле перпендикулярно магнитному  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ ,  $\lambda = 0$ . Если при этом  $E^2 < c^2 B^2$ , то  $\omega$  — действительная величина, не равная нулю, а детерминант  $F_{\mu\nu}$  обращается в нуль. Легко видеть, что решение уравнения (9.33) имеет следующий вид:

$$x_{\nu} = \xi_{\nu} a \cos \omega \tau - \eta_{\nu} a \sin \omega \tau + U_{\nu} \tau, \quad (9.44)$$

где мы положили константу  $X_{\nu 0}$  равной нулю. Из уравнения (9.33) следует, что четырехмерная скорость  $U_{\nu}$  удовлетворяет следующему условию

$$\sum_{\nu} F_{\mu\nu} U_{\nu} = 0. \quad (9.45)$$

Нетривиальные решения  $U_{\nu} \neq 0$  получаются лишь в случае равенства нулю детерминанта  $F_{\mu\nu}$ . Введем обозначения, аналогичные выражению (9.32),

$$U_{\nu} = (U, icU_t), \quad (9.46)$$

где  $U$  — «пространственная» часть, а  $U_t = dt/dt = \gamma$  — «временная» часть четырехмерной скорости  $U$ . Теперь из уравнения (9.45) и соотношения (9.19) следует

$$\vec{U} \times \vec{B} + \vec{E}U_t = 0 \quad (9.47)$$

и

$$\vec{E} \cdot \vec{U} = 0. \quad (9.48)$$

В нерелятивистском пределе  $U_t \rightarrow 1$ , а  $U \rightarrow u_t$ . Поэтому уравнения (9.47) и (9.48) аналогичны уравнениям (3.26) и (2.38) при нерелятивистском движении в однородных полях. Слагаемые в правой части равенства (9.44), содержащие  $a$ , определяют вращение в релятивистском случае. В нерелятивистском случае вращение налагалось на дрейфовое движение ведущего центра и определялось (2.80). Дрейф ведущего центра теперь определяется четырехмерной скоростью  $U_{\nu}$ . В частности,  $U_{\nu}$  связано с энергией движения ведущего центра.

2. Электрическое поле параллельно магнитному. Направив ось  $z$  вдоль вектора магнитного, а следовательно, и электрического полей, получим, что уравнение (9.33) распадется на две системы уравнений

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \omega_g \frac{dy}{d\tau}, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\omega_g \frac{dx}{d\tau} \quad (9.49)$$

и

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = \frac{qE_z}{m} \frac{dt}{d\tau}, \quad \frac{d^2t}{d\tau^2} = \frac{qE_z}{mc^2} \cdot \frac{dz}{d\tau}, \quad (9.50)$$

где  $\omega_g$  — нерелятивистская частота вращения. Решением первой системы уравнений (9.49) будут  $x$  и  $y$ , записан-

ные в виде суммы первых двух членов правой части равенства (9.34) при  $\omega = \omega_g$ . В нерелятивистском пределе этот результат, как и формула (2.80), описывает вращение.

Вторая система уравнений (9.50) имеет решение, равное сумме третьего и четвертого слагаемых правой части равенства (9.34). Такое решение является аperiодическим и связывает  $z$  с  $t$  при  $\lambda = \frac{qE_z}{mC}$ . В нерелятивистском пределе решение первого уравнения системы (9.50) описывает равномерное ускоренное движение ведущего центра вдоль магнитного поля.

## **§ 9. 4. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ**

По аналогии с дрейфовой теорией (см. гл. 3) движение частицы в четырехмерном пространстве можно представить в виде быстрых колебаний, наложенных на медленный дрейф. Эта задача рассматривалась в работах [65, 66]. Применение релятивистских формул позволяет обобщить дрейфовые уравнения на случай частиц высокой энергии. В нерелятивистском пределе мы ограничились изучением геометрии, когда электрическое поле было перпендикулярно или почти перпендикулярно сильному магнитному полю [см. соотношение (3.34)]. Однако в нерелятивистской теории скорость электрического дрейфа  $u_E$  должна быть много меньше скорости света. При релятивистском описании дрейфового движения можно не вводить эти ограничения.

### **4. 1. Исходные предположения и основные уравнения**

Если электромагнитное поле медленно меняется в пространстве и времени, то можно считать, что движение частицы в таком поле мало отличается от движения частицы в однородном поле.

Рассмотрим следующую задачу: найти движение частицы в поле, которое при  $\tau \leq \tau_0$  однородно, а при  $\tau > \tau_0$  слабо неоднородно. Предположим, что, как и в случае, описанном в § 3.2, мы можем отделить дрейф частицы от быстрых колебаний (дрожание). При этом

вектор положения частицы определяется следующим выражением, полученным аналогично уравнению (9.34)

$$x_v = \xi_v a \cos \omega \tau - \eta_v a \sin \omega \tau + \tilde{x}_v + X_v, \quad (9.51)$$

где два первых слагаемых в правой части равенства описывают вращение частицы вокруг силовой линии. Величины  $\xi_v$  и  $\eta_v$  удовлетворяют уравнению (9.36) и (9.43), в то время как  $\omega$  определяется соотношением (9.35). Величина  $X_v$  представляет собой вектор, который меняется медленно и непериодически, т. е. это релятивистская часть вектора  $\vec{C}$ , описывающего положение ведущего центра [см. уравнение (3.6)]. Наконец,  $\tilde{x}_v$  — малая, периодически изменяющаяся часть вектора, описывающего положение частицы и возникающая из-за неоднородности поля. В нерелятивистском пределе появление этого слагаемого объясняется тем, что угловая скорость вращения частицы на некоторую часть периода вращения наклонена к искривленной силовой линии неоднородного магнитного поля. Точное определение  $\tilde{x}_v$  будет дано ниже.

Анализ сильно упростится, если провести следующую замену переменных:

$$\xi_a = \frac{a \cos \omega \tau - ia \sin \omega \tau}{\sqrt{2}}, \quad \xi_a^* = \frac{a \cos \omega \tau + ia \sin \omega \tau}{\sqrt{2}}. \quad (9.52)$$

Введем также векторы

$$\sigma_v = \frac{\xi_v + i\eta_v}{\sqrt{2}}, \quad \delta_v = \frac{\xi_v - i\eta_v}{\sqrt{2}}, \quad (9.53)$$

которые согласно уравнениям (9.38) и (9.43) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sum_v \sigma_v \sigma_v = \sum_v \delta_v \delta_v = 0, \quad \sum_v \sigma_v \delta_v = 1. \quad (9.54)$$

Теперь вектор, описывающий положение частицы, определяется следующей формулой

$$x_v = \delta_v \xi_a + \sigma_v \xi_a^* + \tilde{x}_v + X_v. \quad (9.55)$$

В наших обозначениях переменные  $\xi_a$  и  $\xi_a^*$  описывают основное движение, которое по существу представляет

собой вращение вокруг силовой линии. Периодическое движение, при котором траектория выходит из плоскости  $\sigma, \delta$ , т. е. из плоскости  $\xi$  и  $\eta$ , описывается слагаемым  $\tilde{x}_\nu$ . Таким образом,

$$\sum_{\nu} \sigma_{\nu} \tilde{x}_{\nu} = \sum_{\nu} \delta_{\nu} \tilde{x}_{\nu} = 0. \quad (9.56)$$

Так как в однородном поле движение, описываемое  $x_\nu$ , отсутствует, предположим, что  $|\tilde{x}_\nu| \ll |\xi_a|$ . Это подтверждается результатами, полученными при помощи теории возмущений [66]. Можно ожидать, что в пределе однородного поля  $X_\nu$  становится фундаментальным решением, соответствующим трем последним слагаемым уравнения (9.34) при  $\lambda \neq 0$  и слагаемому  $U, \tau$  в уравнении (9.44) при  $\lambda = 0$ . В любом случае компонента скорости ведущего центра  $U_\nu = dX_\nu/d\tau$ , параллельная плоскости  $\sigma, \delta$ , мала. Предположение о медленности изменения поля соответствует следующим условиям:

$$\frac{a \left| \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right|}{|F_{\mu\nu}|} \ll 1 \quad (9.57)$$

и

$$\frac{1}{\omega} \left| \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right| \cdot |U_\delta| \ll 1, \quad (9.58)$$

аналогичным условиям (3.1) и (3.2). Пусть  $L_c$  — характерная длина интервала в четырехмерном пространстве, на котором изменение  $F_{\mu\nu}$  сравнимо с  $F_{\mu\nu}$ , а  $U_{\nu c}$  — характерная величина компоненты четырехмерной скорости. Тогда из условий (9.57) и (9.58) следует, что

$$\epsilon = \left| \frac{U_{\nu c}}{\omega L_c} \right| \ll 1, \quad (9.59)$$

где  $\epsilon$  можно рассматривать как параметр малости по аналогии с уравнением (3.3).

Неравенства такого типа относятся к любой функции  $\chi(X_\nu)$ , которая зависит от координат и времени через компоненты тензора  $F_{\mu\nu}$ . Таким образом, величина

ны  $|\partial\chi/\partial x|/(\chi/a)$  и  $|d\chi/d\tau|/|\omega\chi|$  порядка  $\epsilon$ . Однако в уравнении

$$\frac{d^2\chi}{d\tau^2} = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{\partial^2\chi}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} U_{\mu} U_{\nu} + \sum_{\nu} \frac{\partial\chi}{\partial x_{\nu}} \cdot \frac{\partial U_{\nu}}{\partial\tau} \quad (9.60)$$

первое слагаемое в правой части является величиной второго порядка по  $\epsilon$ , в то время как о втором слагаемом этого сказать нельзя. Так, например, когда  $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ , ведущий центр движется с бóльшим ускорением и величина  $dU_{\nu}/d\tau$  становится сравнимой с  $\omega U_{\nu}$ . Поэтому, если  $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ , производная  $d^2\chi/d\tau^2$  является величиной порядка  $\epsilon$  по сравнению с  $\omega^2\chi$ .

#### 4. 2. Уравнение движения ведущего центра

Движение частицы описывается восемью неизвестными величинами, входящими в уравнение (9.55). Это четыре компоненты вектора  $X_{\nu}$ , определяющего положение ведущего центра, две величины  $\xi_a$  и  $\xi_a^*$ , описывающие вращение частицы, и две периодически изменяющиеся компоненты  $x_{\nu}$ , перпендикулярные плоскости  $\sigma_{\nu} \delta_{\nu}$ . Уравнение движения (9.33) накладывает четыре условия на эти величины. Эти условия возникают из предположения, что движение можно разделить на осцилляции и дрейф ведущего центра.

Уравнение движения ведущего центра можно вывести так же, как и в нерелятивистском случае (см. гл. 3). Мы не будем приводить детали вычислений. Отметим кратко лишь основные моменты вывода:

1. Если условия (9.57) и (9.58) выполнены, тензор  $F_{\mu\nu}$  можно разложить в ряд Тэйлора.

2. Полученное выражение подставляется в уравнение движения (9.33).

3. Вычисление проводится методом итерации. В первом приближении опускают все члены второго порядка и определяют выражения для  $X_{\nu}$ ,  $\xi_a$  и  $\xi_a^*$ . Затем для получения высших приближений эти выражения подставляют в уравнение движения.

4. Таким образом, в уравнении (9.33) мы в основном пользуемся слагаемыми линейными по  $\xi_a$ . Таким

приемом в уравнении движения вращение отделяется от общего движения.

5. Выделим из последнего уравнения непериодические слагаемые и получим уравнение движения ведущего центра. В первом приближении

$$m \frac{dU_\nu}{d\tau} = q \sum_{\mu} F_{\mu\nu} U_{\mu} - m \xi_{a0}^2 \omega_0 \frac{\partial \omega}{\partial x_{\nu}}, \quad (9.61)$$

где величины  $\omega_0$  и  $\xi_{a0}$  взяты в начальный момент времени. Величина  $q\omega_0\xi_{a0}^2$  — это релятивистская аналогия магнитного момента. При этом уравнение (9.61) эквивалентно уравнению (3.16). Следует отметить, что в уравнение (9.61) входит только переменная  $X_{\nu}$ , поэтому в первом приближении движение ведущего центра не зависит от деталей вращения. Тот факт, что оно не зависит от вращения, делает возможным применение итерации.

6. Используя первое приближение для  $X_{\nu}$ , полученное из уравнения (9.61), можно определить вращение из соответствующего уравнения движения. При помощи определенных таким образом в первом приближении  $X_{\nu}$ ,  $\xi_a$  и  $\xi_a^*$ , а также уравнения движения для  $x_{\nu}$  можно получить уравнение движения для  $\tilde{x}_{\nu}$ .

7. Детальный расчет движения частиц во втором приближении проведен в работе [66].

#### 4. 3. Эквивалентный магнитный момент частицы

Величина

$$M = \frac{q}{\omega} \left| \frac{d\xi_a}{d\tau} \right|^2 \quad (9.62)$$

представляет собой обобщение магнитного момента для релятивистского случая. Это следует из уравнения (9.52), в котором  $\xi_a$  описывает вращение частицы, а

$$M = q |\xi_a|^2 \omega = \frac{1}{2} qa^2\omega. \quad (9.63)$$

В нерелятивистском пределе  $a$  определяется выражением (2.81),  $\omega = qB/m$ , а формулу (9.63) получим из выражений (4.65) и (2.83).

При помощи методов, описанных в работе [19] и в § 2.1 гл. 4, можно установить, что величина  $M$  — адиабатический инвариант. Рассмотрим случай, когда частица находится в неоднородном поле в течение промежутка времени  $\tau_0 < \tau < \tau_f$ , а в остальные моменты времени поле однородно. По аналогии с формулой (4.67) предположим, что скорость частицы и изменение поля таковы, что

$$\left| \omega / \frac{d\omega}{d\tau} \right|_{\text{мин}} = \tau_\omega. \quad (9.64)$$

Перейдем далее к пределу бесконечно медленных изменений поля, полагая  $\tau_0 \rightarrow -\infty$ ,  $\tau_f \rightarrow +\infty$  и  $\tau_\omega \rightarrow \infty$ . Если при этом  $\Delta M = M(\tau \rightarrow +\infty) - M(\tau \rightarrow -\infty) \rightarrow 0$ , то  $M$  — адиабатический инвариант. Используя выражение для  $d\xi_a/d\tau$  с точностью до членов второго порядка по  $\epsilon$ , полученное в работе [66], найдем, что  $\Delta M \rightarrow 0$  во всяком случае быстрее, чем вторая степень  $\epsilon$ . Таким образом,  $M$  есть адиабатический инвариант по крайней мере с точностью до членов второго порядка.

#### **4. 4. Движение ведущего центра в почти взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях**

Когда поле  $\vec{E}$  почти перпендикулярно  $\vec{B}$ , компонента  $E_{\parallel}$  мала. Поэтому кроме  $\epsilon$  можно ввести дополнительный параметр малости, который при помощи соотношения (9.35) можно записать в виде

$$\frac{\lambda}{\omega} \approx \frac{\vec{E} \cdot \frac{\vec{B}}{c}}{B^2 - \frac{E_{\perp}^2}{c^2}} \ll 1. \quad (9.65)$$

Ограничимся случаем, когда  $E^2 < c^2 B^2$ , так что  $\omega$  остается конечным, когда  $E_{\parallel}$  и  $\lambda$  стремятся к нулю. Будем считать, что  $\epsilon$  и  $\lambda/\omega$  — величины одного порядка, хотя необходимо помнить, что их малость соответствует различным физическим предположениям. Итак,  $E_{\parallel}$  и  $\lambda$  — величины первого порядка. Разобьем тензор  $F_{\mu\nu}$  на



две части, одна из которых  $F_{\mu\nu}^{(0)}$  содержит  $\vec{B}$  и  $\vec{E}_\perp$ , а вторая  $F_{\mu\nu}^{(1)}$  содержит только  $\vec{E}_\parallel$ . Аналогично можно разбить четырехмерную скорость ведущего центра (9.46) на две части нулевого и первого порядков соответственно

$$U_\nu = U_\nu^{(0)} + U_\nu^{(1)}. \quad (9.66)$$

Собственное значение  $F_{\mu\nu}^{(0)}$ , не равное нулю,

$$\omega^{(0)} := \frac{q}{m} \left( B^2 - \frac{E_\perp^2}{c^2} \right)^{1/2}. \quad (9.67)$$

Используя теперь выражение (9.46) для четырехмерной скорости  $U_\nu$ , получим при помощи уравнения (9.61)

$$\sum_\mu F_{\nu\mu}^{(0)} U_\mu^{(0)} = 0 \quad (9.68)$$

и

$$m \frac{dU_\nu^{(0)}}{d\tau} = q \sum_\mu (F_{\nu\mu}^{(0)} U_\mu^{(1)} + F_{\nu\mu}^{(1)} U_\mu^{(0)}) - m \xi_{a0}^2 \omega_0 \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu}. \quad (9.69)$$

Мы рассматривали главным образом движение в четырехмерном представлении. Для практики интересны явные выражения, описывающие зависимость от координат и времени. Беря пространственные компоненты уравнения (9.69), получим

$$m \frac{dU_t^{(0)}}{d\tau} = q (\vec{U}^{(1)} \times \vec{B} + \vec{E}_\perp U_t^{(1)} + c \vec{E}_\parallel U_t^{(0)}) - m \xi_{a0}^2 \omega_0 \vec{\nabla} \omega, \quad (9.70)$$

а взяв временную компоненту этого же уравнения, получим

$$m c^2 \frac{dU_t^{(0)}}{d\tau} = q (\vec{E}_\perp \cdot \vec{U}^{(1)} + \vec{E}_\parallel \vec{U}^{(0)}) + m \xi_{a0}^2 \omega_0 \frac{\partial \omega}{\partial t}. \quad (9.71)$$

Уравнение (9.70) выражает закон сохранения импульса, а соотношение (9.71) — закон сохранения энергии.

Уравнение (9.68) можно переписать в следующем виде:

$$\vec{U}^{(0)} \times \vec{B} + \vec{E}_\perp \cdot \vec{U}_t^{(0)} = 0, \quad E_\perp \cdot U^{(0)} = 0, \quad (9.72)$$

поэтому

$$U_v^{(0)} = \left( \widehat{B} U_{\parallel}^{(0)} + \vec{u}_E U_t^{(0)}, \quad icU_t^{(0)} \right), \quad (9.73)$$

где  $\vec{u}_E = \vec{E} \times \vec{B} / B^2$ . Здесь  $U_{\parallel}^0$  — компонента четырехмерной скорости в направлении магнитного поля, а  $U_t^{(0)}$  — медленно меняющаяся часть энергии частицы. Уравнение движения для  $U_v^{(1)}$  содержит пространственные компоненты (9.70), которые перпендикулярны магнитному полю. Выразим теперь четырехмерные скорости в уравнениях (9.70) и (9.71) при помощи их пространственных и временных компонент согласно соотношениям (9.46) и (9.32). Пусть  $\vec{E}_\perp^*$  — величина нулевого порядка по  $\epsilon$ ,  $\vec{E}_\parallel$  — величина первого порядка, зависимость от времени не содержит малости  $\epsilon$ . Тогда согласно работе [68] из уравнений (9.70) и (9.71) следует

$$\begin{aligned} \vec{u}_\perp = & \left\{ q \left( 1 - \frac{\vec{E}_\perp^2}{c^2 B^2} \right) \vec{E} - \frac{M}{\gamma} \nabla \left[ B \left( 1 - \frac{E_\perp^2}{c^2 B^2} \right)^{1/2} \right] - \right. \\ & - m\gamma \left( u_{\parallel} \frac{d\widehat{B}}{dt} + \frac{d\vec{u}_E}{dt} \right) - q \left( \frac{u_{\parallel} E_{\parallel}}{c^2} \right) \vec{u}_E - \\ & \left. - \frac{M}{\gamma c^2} \vec{u}_E \frac{\partial}{\partial t} \left[ B \left( 1 - \frac{E_\perp^2}{c^2 B^2} \right)^{1/2} \right] \right\} \times \\ & \times \frac{\vec{B}}{qB^2 \left( 1 - \frac{E^2}{c^2 B^2} \right)} + 0 (\epsilon^2), \quad (9.74) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m \frac{d(\gamma u_{\parallel})}{dt} = & m\gamma \vec{u}_E \frac{d\widehat{B}}{dt} + qE_{\parallel} - \\ & - \frac{M}{\gamma} \frac{\partial}{\partial s} \left[ B \left( 1 - \frac{E_\perp^2}{c^2 B^2} \right)^{1/2} \right] \quad (9.75) \end{aligned}$$

и

$$\frac{d}{dt}(mc^2\gamma) = q\vec{E} \cdot \vec{u} + \frac{M}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left[ B \left( 1 - \frac{E_{\perp}^2}{c^2 B^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (9.76)$$

Здесь

$$M = \frac{(P_{\perp}^*)^2}{2mB \left( 1 - \frac{E_{\perp}^2}{c^2 B^2} \right)}, \quad (9.77)$$

где  $P_{\perp}^*$  — поперечный импульс частицы в релятивистском пределе в системе координат, движущейся со скоростью  $\vec{u}_E$ . Величина  $M$  представляет собой релятивистское выражение для магнитного момента частицы, определяемого выражением (2.83). Можно показать, что она пропорциональна магнитному потоку через ларморовский кружок частицы в системе координат, где электрическое поле параллельно магнитному [66].

Уравнения (9.74) и (9.75) аналогичны соотношениям (3.18) и (3.17), а уравнение (9.76) выражает собой баланс энергии. Первый член в фигурных скобках уравнения (9.74) соответствует электрическому дрейфу (3.26). Второй член аналогичен части дрейфа из-за неоднородности магнитного поля (3.24). Третье слагаемое содержит две части: а) соответствующую дрейфу из-за неоднородности магнитного поля (3.24) (кривизна силовых линий); б) часть, аналогичную поляризационному дрейфу (3.27). Наконец, два последних слагаемых обязаны своим происхождением чисто релятивистским эффектам.

Полученные результаты соответствуют общему случаю, когда  $E_{\perp}$  есть величина нулевого порядка и поперечный электрический дрейф очень велик. Если  $E_{\perp}$  — величина первого порядка, а  $E_{\perp}^2 \ll c^2 B^2$ , то величиной  $E_{\perp}^2 / c^2 B^2$  в уравнениях (9.74) — (9.77) можно пренебречь.

При этом члены, содержащие  $\vec{u}_E$ , становятся малыми. В этом случае решение совпадает с ранее полученными в работе [80]. В таблице приведены величины импульса, радиуса вращения и магнитного момента для релятивистского и нерелятивистского случаев.

В нерелятивистском пределе уравнение (9.74) переходит в уравнение (3.18). Если электрическое поле и

**Сопоставление величин в релятивистском  
и нерелятивистском пределах, когда электрический дрейф  
и характерный масштаб времени являются величинами  
первого порядка по  $\epsilon$**

Величина	Нерелятивистский предел	Релятивистский предел
Скорость вращения в лабораторной системе координат	$\vec{W}$	$\vec{W}$
Поперечный импульс, связанный с ларморовским вращением	$m\vec{W}$	$\gamma m\vec{W}$
Ларморовский радиус	$mW/ q B$	$\llbracket \gamma mW/ q B \rrbracket$
Эквивалентный магнитный момент	$(mW)^2/2mB$	$(\gamma mW)^2/2mB$

сила  $F$  равны нулю, то разница между этими уравнениями будет существенной лишь при  $\gamma \gg 1$ . Этого следовало ожидать, так как согласно результатам § 3.1 движение релятивистской частицы можно определить из нерелятивистского уравнения движения, заменив в последнем массу  $m$  на релятивистскую  $\gamma m$ .

## Глава 10

### ИЗЛУЧЕНИЕ

В этой главе дается теория излучения электромагнитных волн движущимися частицами [31, 32, 187]. Задачи об излучении, представляющие интерес для физики плазмы, приведены в работах [16, 19, 191].

В настоящей главе излучение будем изучать на основе классической теории без учета квантово-механических эффектов. Предположим также, что электроны и ионы имеют тепловое распределение скоростей, поэтому явление излучения из-за неустойчивостей волн и других коллективных явлений здесь не рассматривается.

#### § 10. 1. РОЛЬ ИЗЛУЧЕНИЯ В ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ

Излучение играет важную роль как в астрофизике, так и в исследованиях высокотемпературной плазмы. Электромагнитная энергия, излучаемая заряженной частицей, резко возрастает при ее ускорении. Поэтому в полностью ионизованном газе высокой температуры плотность излучения становится заметной величиной.

В исследованиях по физике горячей плазмы излучение приводит к значительным «потерям», причем еще не найдены способы борьбы с ними. Если воспользоваться законом Стефана—Больцмана, то типичная термоядерная система потеряет свою энергию за время порядка  $10^{-17}$  сек. К счастью, излучение  $\gamma$ -квантов с частотами, много большими плазменных и циклотронных, становится очень слабым, а плазма в оптическом смысле тонкой. Действительно, вряд ли можно ожидать, чтобы кванты с энергией выше  $10^{-3}$  эв находились бы в тепловом равновесии. Однако даже эта малая область спектра может привести к большим потерям энергии [192].

Значительная часть радиационных потерь энергии заряженной частицы приходится на долю тормозного и циклотронного излучения. Тормозное излучение возни-

кает при торможении частицы из-за кулоновских столкновений, а циклотронные — за счет ларморовского вращения в магнитном поле. Кроме того, линейчатое и тормозное излучения даже от очень небольшого количества примесей приводят к потерям, которые на много порядков превосходят аналогичные потери от водорода и его изотопов [193].

Спектры излучения атомов служат удобным диагностическим инструментом как в физике плазмы, так и в астрофизике. Для исследования свойств плазмы и удерживающих ее магнитных полей можно также использовать тормозное и циклотронное излучение свободных заряженных частиц.

## **§ 10. 2. ПОЛЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА**

Решениями уравнений (2.17) и (2.18) в случае вакуума являются распространяющиеся электромагнитные волны. Рассмотрим, как происходит излучение этих волн системой движущихся зарядов. Начнем с простейшего случая — движения заряда в вакууме.

### **2. 1. Потенциалы движущегося заряда**

Поле зарядов с плотностью  $\sigma$  и связанной с ней плотностью тока  $\vec{j}$  описывается при лоренцевской калибровке запаздывающими потенциалами (2.19) и (2.20).

Однако применять эти формулы к определению поля точечного заряда следует осторожно. В частности, интеграл уравнения (2.20) нельзя полагать равным величине  $q/r$  при  $t^* = t - R/c$ , так как необходимо вводить различные значения для каждой точки источника  $\rho^*$ . Поэтому преобразуем выражение (2.19) и (2.20), проинтегрировав их по элементам заряда, распределенного с плотностью  $\sigma$ , а затем уже перейдем к точечному заряду.

Предположим, что все элементы данного распределения зарядов жестко связаны друг с другом и движутся с одной скоростью  $\omega(t^*)$  в один и тот же момент времени  $t^*$ . Пусть далее сферическая оболочка с площадью поверхности  $S$  и толщиной  $dR^*$  помещена на расстоянии  $R^*$  от точки наблюдения  $P$  в формуле (10.1).

Элемент объема такой оболочки равен  $dV^* = dS dR^*$ . В интеграл (2.20) будет давать вклад тот заряд, который излучает сферическую световую волну, движущуюся со скоростью  $c$  и достигающую точки  $P$  в момент времени  $t$ . Волна пересечет внешнюю поверхность сферической оболочки в момент времени  $t^* = t - R^*/c$ . В течение времени  $dt = dR^*/c$ , необходимого световой

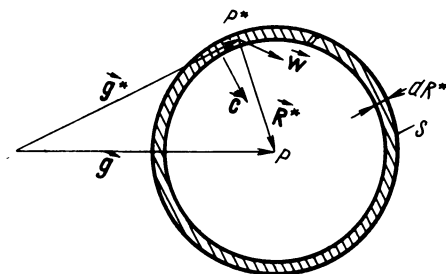


Рис. 10.1. Сферическая световая волна сходится со скоростью  $c$  к точке  $P$ . Волна проходит сферическую оболочку толщиной  $dR^*$ , внутри которой распределены заряды плотностью  $\sigma$ , движущиеся со скоростью  $\vec{W}$ .

волне для того, чтобы пройти оболочку, в поле волны будет находиться суммарный заряд  $\sigma dS dR^* = \sigma dV^*$ , если при этом заряды не движутся. Однако заряды движутся, и за время  $dt$  некоторые из них войдут или выйдут из указанной сферической оболочки. Следовательно, будет соответственно меняться вклад в интегралы (2.19) и (2.20). В точке  $\rho^*$ , отмеченной на рис. 10.1, такое изменение поверхностной плотности заряда  $\vec{\sigma} \cdot \vec{R}^* dt = \vec{\sigma} \cdot \vec{R}^* \frac{dR^*}{c}$ , где вектор  $\vec{R}^* = \vec{\rho} - \vec{\rho}^*$  направлен вдоль  $P^*P$ . Элемент заряда, который находится в поле волны в течение времени  $dt$  и дает вклад в поле в точке  $P$ , равен поэтому не  $\sigma dV^*$ , а

$$dQ = \partial \left( 1 - \vec{\omega} \cdot \frac{\vec{R}^*}{c} \right) dV^*. \quad (10.1)$$

Подставив выражение (10.1) в уравнения (2.19) и (2.20) для точечного заряда  $q$ , получим

$$A(\rho, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{q\vec{\omega}}{\rho - \vec{\omega} \cdot \vec{\rho}/c^2} \right]_{t^*} \quad (10.2)$$

и

$$\Phi(\vec{\rho}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{1 - \vec{\omega} \cdot \vec{\rho}/c} \right]_{t^*}, \quad (10.3)$$

где начало координат выбрано в той точке, где находится частица ( $\vec{\rho}^* = 0$ ,  $\vec{R}^* = \vec{\rho}$ ), а величины в правой части формул (10.2) и (10.3) следует брать в момент времени  $t^*$ . Потенциалы (10.2) и (10.3) впервые вывели Лиенар [194] и Вихерт [195].

## 2. 2. Поле движущегося заряда

Из уравнений (2.8) и (2.10) можно определить электрическое и магнитное поля, воспользовавшись выражениями для потенциалов  $A$  и  $\Phi$ . Необходимо помнить при этом, что производные в соотношениях (2.8) и (2.10) взяты по времени  $t$  и координате точки наблюдения  $P$ , в то время как в выражениях (10.2) и (10.3) — по функции  $t^*$ . Таким образом, нужно выразить электромагнитное поле в точке  $P$  в момент времени  $t$  через координаты точки  $P^*$ , в которой находится заряд в момент времени  $t^*$ . Движение частицы в момент времени  $t^*$  определяется ее положением  $\vec{\rho}(t^*)$  и скоростью  $\vec{\omega}(t^*) = d\vec{\rho}/dt^*$  в это время. Известно также, что  $\rho(t^*) = c(t - t^*)$ , следовательно,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial t^*}{\partial t} = - \left( \vec{\rho} \cdot \vec{\omega} \right) \frac{dt^*}{dt} = c \left( 1 - \frac{\partial t^*}{\partial t} \right) \quad (10.4)$$

и

$$\frac{\partial t^*}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}}{rc}}. \quad (10.5)$$



Так как  $\rho = c(t - t^*)$ ,  $t^*$  — теперь функция координат точки  $P$ . Вывод, подобный проделанному, приводит к следующему соотношению

$$\vec{\nabla} t^* = - \frac{\vec{\rho}}{c \left( 1 - \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}}{\rho c} \right)}. \quad (10.6)$$

Подставим теперь выражения (10.2) и (10.3) в уравнения (2.8) и (2.10). После некоторых преобразований с использованием соотношений (10.2) и (10.6) окончательно получим

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \times \frac{\left[ \dot{\vec{\omega}} \times \left( \vec{\rho} - \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}}{c} \right) \right] \times \vec{\rho} + \left( 1 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left( \vec{\rho} - \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}}{c} \right)}{\left( \rho - \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}}{c} \right)^3}, \quad (10.7)$$

$$\vec{B} = \vec{\rho} \times \frac{\vec{E}}{\rho c}. \quad (10.8)$$

Здесь предполагается, что все величины взяты в момент времени  $t^*$ ;  $\rho$  — расстояние между зарядом и точкой, в которой определяется магнитное поле в этот момент времени, а  $\dot{\vec{\omega}} = \partial \vec{\omega} / \partial t^*$ .

Из выражений (10.7) и (10.8) видно, что полученные поля можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых пропорционально ускорению  $\dot{\vec{\omega}}$  и убывает как  $1/\rho$  на больших расстояниях, а второе не зависит от  $\dot{\vec{\omega}}$  и убывает при больших  $\rho$  как  $1/\rho^2$ . Первое из них называется полем ускорения. Для него как  $\vec{E}$ , так и  $\vec{B}$  перпендикулярно  $\rho$ , оно преобладает на больших расстояниях и связано с излучением. Вектор Пойнтинга, определенный для этого поля, ведет себя при больших  $\rho$  как  $1/\rho^2$ . Отсюда следует, что полный поток энергии, как и следовало ожидать, не зависит от расстояния. Второе слагаемое называют полем скорости. Оно связано с кулоновским полем точечного заряда, в которое и пере-

ходит при  $\vec{\omega}=0$ . Для  $\vec{\omega}=0$  его можно получить из кулоновского потенциала при помощи преобразования Лоренца.

### 2. 3. Энергия, излучаемая движущимся зарядом

Излучение определяется тем слагаемым из формул (10.7) и (10.8), которое пропорционально ускорению. Это естественно, так как легко показать, что частица, движущаяся в вакууме с постоянной скоростью, не излучает энергию. Действительно, согласно соотношениям (9.28) и (9.29), энергия частицы  $\mathcal{E}$  связана с ее импульсом  $P$  следующим образом:

$$\mathcal{E}^2 = \frac{m^2 c^4}{1 - \omega^2/c^2} = m^2 c^4 + P^2 c^2. \quad (10.9)$$

Дифференцируя это уравнение по  $\varepsilon$ , получаем

$$\frac{dP}{d\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}}{Pc^2} = \frac{[1 + (mc/P)^2]^{1/2}}{c}. \quad (10.10)$$

Для фотона ( $m=0$ ) должно было бы получиться  $dP/d\mathcal{E}=1/c$ , а для частицы с массой покоя  $m \neq 0$   $dP/d\mathcal{E} > 1/c$ , т. е. свободно движущаяся частица не может излучать электромагнитные волны, так как энергия и импульс не сохраняются одновременно для поля и для частицы в отдельности. Следовательно, для того чтобы частица излучала, на нее должны действовать внешние силы. В §§ 10.3—10.5 будут приведены примеры, иллюстрирующие это положение.

Вычислим количество энергии, излучаемое частицей в единицу времени  $t^*$ . Предположим, что заряд излучает волны в течение времени  $dt^*$ . Тогда промежуток времени  $dt$  между первым и последним сигналами, пришедшими в точку наблюдения, равен согласно соотношению (10.5)  $(1 - \vec{\omega} \cdot \vec{\rho}/\rho c) dt^*$ . По теореме Пойнтинга поток энергии через единицу площади в единицу времени  $t$  равен  $\vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$ . Отсюда излученная зарядом энергия в единицу времени  $t^*$  в единицу телесного угла  $Y$  определяется выражением

$$\frac{d(\Delta P_r)}{dY} = \rho^2 \left( 1 - \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}}{\rho c} \right) \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}. \quad (10.11)$$

Абсолютная величина выражения  $\vec{\rho} \cdot \vec{\omega} / \rho c$  меньше единицы, причем эта величина осциллирует, когда частица вращается во внешнем магнитном поле. Подставляя из выражений (10.7) и (10.8) в выражение (10.11) те слагаемые, которые пропорциональны ускорению, получаем [18]

$$\frac{d(\Delta P_r)}{dY} = \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \times \left[ \frac{\vec{\omega}^2}{(1 - \vec{\rho} \cdot \vec{\omega} / \rho c)^3} + 2 \frac{\widehat{(\vec{\rho} \cdot \vec{\omega})} \cdot \dot{(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega} / c)}}{(1 - \vec{\rho} \cdot \vec{\omega} / \rho c)^4} - \frac{(1 - \omega^2 / c^2) \widehat{(\vec{\rho} \cdot \vec{\omega})}^2}{(1 - \vec{\rho} \cdot \vec{\omega} / \rho c)^5} \right]. \quad (10.12)$$

Интегрируя это выражение по телесному углу, получаем на большом расстоянии от заряда

$$\Delta P_r = \frac{q^2}{16\pi \varepsilon_0 c^3} (\dot{\omega}_{\parallel}^2 \gamma^6 + \dot{\omega}_{\perp}^2 \gamma^4), \quad (10.13)$$

где  $\dot{\omega}_{\parallel}$  и  $\dot{\omega}_{\perp}$  — соответственно параллельная и перпендикулярная к направлению скорости  $\omega$  компоненты ускорения.

Если перейти в систему координат, в которой частица покоится, то преобразуя уравнение (9.25) получаем

$$\Delta P_r = \frac{q^2}{16\pi \varepsilon_0 c^3} (\vec{\omega}')^2. \quad (10.14)$$

Из формул (10.13) и (10.14) следует, что мощность излучения пропорциональна квадрату электрического заряда. Поэтому, если скоррелировать определенным образом движение большого числа частиц, мощность излучения сильно возрастет.

### § 10. 3. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Внешняя сила, приводящая к ускорению частицы, а следовательно, к излучению энергии, в разреженной плазме может возникнуть при кулоновском рассеянии. Рассмотрим единичный акт столкновения двух заряженных частиц, пренебрегая релятивистскими и квантовомеханическими эффектами. Это значит, что характерная

длина  $\frac{\omega^2}{\omega}$ , на которой изменяется скорость частицы, должна быть много больше длины волны де Бройля рассеянной частицы  $\frac{h}{m\omega}$ , т. е.

$$\left| \frac{\omega^2}{\omega} \right| \gg \frac{h}{m}. \quad (10.15)$$

В случае кулоновского рассеяния электрона на ионе с зарядом  $Ze$  электрон получает ускорение

$$\dot{\omega} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e \rho^2}. \quad (10.16)$$

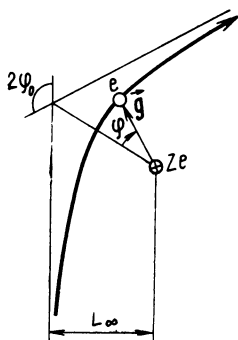


Рис. 10.2. Кулоновское рассеяние электрона ионом.

При этом предполагается, что ион находится в начале координат и его отдачей можно пренебречь. Будем считать, что  $\omega^2/c^2 \ll 1$ . Так как кулоновское поле является центральным, то векторное произведение  $\vec{\rho}$  из уравнения (2.36) легко проинтегрировать. В результате получаем, что величина  $\vec{\rho} \times d\vec{\rho}/dt$  постоянна. Это известный закон сохранения площадей, который в обозначениях, приведенных на рис. 10.2, имеет следующий вид

$$\frac{\rho^2 d\varphi}{dt} = L_\infty \omega_\infty. \quad (10.17)$$

Здесь  $L_\infty$  — прицельный параметр, а  $\omega_\infty$  — скорость электрона на бесконечности.

При помощи уравнений (10.14), (10.16) и (10.17) определим количество энергии, излученное при столкновении,

$$\Delta \mathcal{E} r = \frac{Z^2 e^6}{96\pi^3 \epsilon_0^3 m_e^6 c^3 L_\infty \omega_\infty} \int_{-(\pi-\varphi_0)}^{(\pi-\varphi_0)} \frac{d\varphi}{\rho^2}. \quad (10.18)$$

Количество энергии, излучаемое в единичный объем, можно получить, проинтегрировав выражение (10.18) для всех электронов по всем значениям прицельного

параметра  $L_\infty$  и угла  $\varphi_0$ . Самый большой вклад в этот интеграл дают малые значения  $L_\infty$  и  $\varphi_0$ . Наименьшее возможное значение  $L_\infty$  равно  $h/2\pi m_e \omega_\infty$  (ср. с результатом, полученным в работе [31]). Если  $n_i$  — плотность ионов, а  $n_e$  — плотность электронов, то излученная в единицу объема мощность, согласно данным работ [23, 16], определяется выражением

$$P_{rb} = \frac{\pi Z^2 e^6}{144 \varepsilon_0^3 m_e^2 c^3 h} n_i n_e \omega_\infty \text{ кв.} \quad (10.19)$$

В случае термодинамического равновесия, когда можно ввести температуру  $T_e$ , соотношение (10.19) сводится к

$$P_{rb} = 2,6 \cdot 10^{-40} n_i n_e Z^2 \sqrt{T_e} \text{ вт/м}^3. \quad (10.20)$$

Этот результат хорошо согласуется с точным квантово-механическим расчетом, отличаясь лишь коэффициентом в формуле (10.20). Точное значение коэффициента равно  $1,7 \cdot 10^{-40}$  [16, 31].

Полученные результаты показывают, что мощность тормозного излучения быстро растет при увеличении плотности частиц и заряда ионов, однако слабо зависит от температуры. Из-за большей массы ионы получают гораздо меньшее ускорение при кулоновском рассеянии, чем электроны той же температуры. Поэтому можно пренебречь излучением ионов по сравнению с излучением, определенным формулой (10.20), по крайней мере в плазме, находящейся вблизи термодинамического равновесия.

#### § 10. 4. ЧЕРЕНКОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

В плотной среде необходимо учитывать не только взаимодействие между частицами, но также между частицами и излучением. При этом основное влияние на процесс излучения оказывает взаимодействие с частицами, находящимися на больших расстояниях.

В плотной среде кроме вакуумного поля от движущихся зарядов существует вторичное поле, формируемое средой, которое можно описать при помощи эквивалентной диэлектрической проницаемости. Поэтому скорость распространения света в среде становится меньше  $c$ . Следствием этого положения является то, что

частицы большой энергии могут двигаться в среде со скоростью, превышающей местную скорость света. Благодаря этому возникает излучение, распространение которого аналогично распространению ударной волны, движущейся в среде со сверхзвуковой скоростью. Во время движения импульс поглощается средой в соответствии с выводами § 2.3. Такой эффект впервые наблюдал Черенков [196]. Изучение эффекта Черенкова в плазме было проведено в работах [23, 197, 198].

### **§ 10. 5. ЦИКЛОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ**

К излучению может приводить не только взаимодействие частиц, но и ускорение частиц во внешних полях. Примером этого может служить циклотронное излучение, которое возникает за счет ларморовского вращения заряда в магнитном поле.

Спектр частот этого излучения впервые получил Шотт [199], а более тщательный анализ был проведен в работе [200]. Излучение электронов в магнитном поле земли было исследовано Померанчуком [201]. В работе [202] было высказано предположение, что радиоизлучение звезд связано с излучением электронов космических лучей, вращающихся в магнитном поле звезды.

В работах [203—205] основные положения теории циклотронного затухания были применены к расчету излучения Крабовидной туманности. Начиная с 1958 г. появляются работы, в которых излучение планеты Юпитер связывается с циклотронным излучением. Краткое изложение этих работ можно найти в обзоре Чанга [206].

Циклотронное излучение приводит к большим потерям энергии в установках, предназначенных для термоядерного синтеза. Подробный анализ возникающих при этом проблем можно найти в работах [207—209]. Исследования в этой области продолжают.

#### **5. 1. Мощность, излучаемая из оптически прозрачной плазмы**

Ускорение частицы, вращающейся в магнитном поле, направлено перпендикулярно ее скорости  $\vec{\omega}$ . Ускорение  $\vec{\omega}_{\parallel}$ , введенное в разделе 2.3, обращается при этом в

нуль. Введем углы  $\theta$  и  $\varphi$  так, как показано на рис. 10.3, и сделаем соответствующую замену в соотношении (10.12), определяющем мощность, излучаемую в единицу телесного угла. Если скорость частицы строго перпендикулярна магнитному полю, то

$$\frac{d(\Delta P_r)}{dY} = \frac{q^2 \omega_{\perp}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left[ 1 - \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{\left[1 - \frac{\omega}{c} \cos \theta\right]^2} \right] \times \times \left(1 - \frac{\omega}{c} \cos \theta\right)^3. \quad (10.21)$$

Мощность излучения имеет максимум в направлении скорости вращения  $\vec{\omega}$  при  $\theta = \varphi = 0$ . В релятивистском пределе, когда отношение  $\omega/c$  стремится к единице, поле излучения сосредоточено в узком конусе в направлении  $\vec{\omega}$ . В результате этого, приближаясь к частице, вращающейся со скоростью, близкой к скорости света, наблюдатель будет фиксировать импульсы излучения, разделенные во времени. Иными словами, будет происходить излучение высших гармоник (см. § 5.2).

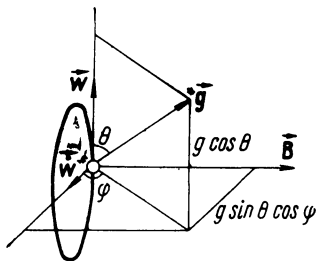


Рис 10.3 Геометрические соотношения между скоростью, ускорением и радиус-вектором, проведенным в точку наблюдения для заряда, вращающегося в плоскости, перпендикулярной внешнему магнитному полю  $\vec{B}$ .

Полная мощность, излучаемая одной частицей в лабораторной системе, определяется соотношением (10.13) при  $\dot{\omega}_{(II)} = 0$ . Если  $\vec{E} = 0$ , то решением уравнения (9.28) будет

$\dot{\omega}_{\perp}^2 = \omega_g \omega_{\perp}^2 / \gamma^2$ , где  $\omega_g = qB/m$  — нерелятивистское значение частоты вращения, а  $\vec{\omega}_{\perp}$  — перпендикулярная магнитному полю компонента скорости. Таким образом, определим полную мощность, излученную частицей,

$$\Delta P_{rc} = \frac{q^2}{16\pi \epsilon_0 c^3} \omega_g^2 \gamma^2 \omega_{\perp}^2 = \frac{q^2}{16\pi \epsilon_0 c^3} \omega_g^2 \left(\frac{P_{\perp}}{m}\right)^2. \quad (10.22)$$

Здесь  $P_{\perp}$  — перпендикулярная компонента вектора — импульса в релятивистском случае. Если ионизованный газ находится в термодинамическом равновесии, то можно считать, что скорости частиц распределены по Максвеллу, а  $T$  — температура частиц. В релятивистском случае функция распределения частиц по Чэпмену и Каулингу [11] имеет следующий вид

$$f(P) = \left[ 4\pi m^2 c k T K_2 \left( \frac{mc^2}{kT} \right) \right]^{-2} \exp \left( \frac{mc^2}{kT} \right) \left( 1 - \frac{w^2}{c^2} \right)^{-1/2}, \quad (10.23)$$

где  $K_2(mc^2/kT)$  — функция Макдональда второго порядка. Интегрируя соотношение (10.22) с учетом функции распределения, получим полную мощность, излучаемую частицами плотности  $n$  в единицу объема. Согласно работе [219]

$$P_{rc} = \frac{q^2 \omega_g^2}{3\pi \epsilon_0 c} \left( \frac{kT}{mc^2} \right) n \left( 1 + \frac{5}{2} \frac{kT}{mc^2} + \dots \right). \quad (10.24)$$

Электроны из-за малой массы излучают больше энергии, чем ионы при той же температуре. Мощность, излучаемая электронами, равна

$$P_{rc} = 5,3 \cdot 10^{-24} n_e B^2 T_e (1 + 4,2 \cdot 10^{-10} T_e t \dots) \text{ вт м}^3. \quad (10.25)$$

В квазинейтральной дейтериевой плазме, когда ионы и электроны имеют почти одинаковые температуры, а плотность магнитной энергии  $B^2/2\mu_0$  равна по порядку величины полному давлению  $2nkT$ , получим мощность излучения

$$P_{rc} \approx 3,7 \cdot 10^{-52} n^2 T^2 \text{ вт м}^3. \quad (10.26)$$

Это соотношение справедливо лишь по порядку величин. Найдем отношение вычисленной мощности к мощности тормозного излучения согласно формуле (10.20)

$$\frac{P_{rc}}{P_{rb}} \approx 1,4 \cdot 10^{-12} T^{2/3}, \quad 4\mu_0 nk \frac{T}{B^2} \approx 1, \quad Z = 1. \quad (10.27)$$

Из формулы (10.27) следует, что отношение  $P_{rc}/P_{rb}$  резко возрастает с увеличением температуры, а при температуре

$$T \sim 7 \cdot 10^7 \text{ } ^\circ\text{K} \quad P_{rc}/P_{rb} \sim 1.$$



Полученные результаты справедливы для прозрачной плазмы, т. е. такой плазмы, в которой излучение от каждого электрона свободно выходит из объема плазмы, не взаимодействуя с последней. При температуре  $T \sim 10^8$  К (температура, при которой могут идти термоядерные реакции) потери из-за циклотронного излучения становятся огромными. К сожалению, пока неизвестно, как сбалансировать эти потери энергией, создаваемой генератором, использующим в качестве топлива дейтерий. Потери, определяемые формулой (10.25), существенны даже в реакторе, работающем на смеси трития и дейтерия, хотя скорость реакции при этих температурах примерно в десять раз больше, чем при использовании чистого дейтерия.

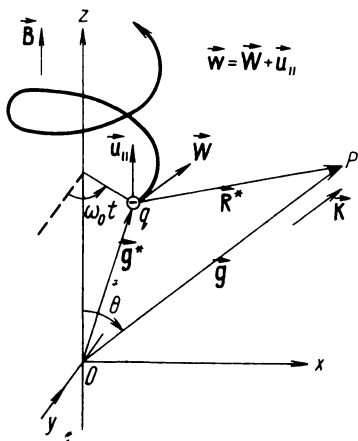
К счастью, только часть излучаемой мощности выходит из плазмы, так как волна, излученная одним электроном, взаимодействует с остальными электронами плазмы. В результате большая часть излученной энергии опять поглощается плазмой. Теоретическое объяснение описанных фактов становится сравнительно простым в нерелятивистском случае. Обычно в лабораторных установках частота плазменных колебаний  $\omega_p = (e^2 n / \epsilon_0 m_e)^{1/2}$  больше, чем циклотронная частота  $\omega_c$  электронов. Для электронов, движущихся со скоростью много меньше скорости света, циклотронное излучение не может свободно выходить из объема, занятого плазмой, поэтому потери энергии из-за циклотронного излучения малы. Однако при необходимых для термоядерного синтеза температурах  $T \sim 10^8$  К частицы, скорость которых начинает приближаться к скорости света, движутся по сложным траекториям, так как при таких скоростях необходимо учитывать обратное воздействие циклотронного излучения на эти частицы. Таким образом, движение с релятивистскими скоростями приводит к появлению высших гармоник и приходится вводить понятие распределения энергии по спектру и поглощения излучения. Эти вопросы и способы, при помощи которых можно увеличить поглощение плазмой циклотронного излучения, будут рассмотрены в дальнейшем.

К сожалению, существует еще одна проблема, которую мы не можем здесь полностью осветить. Она касается излучения, связанного с неустойчивостями, волнами и другими коллективными эффектами. При

рассмотрении таких движений следует учитывать корреляцию между частицами плазмы. Согласно формуле (10.13) величина  $\Delta P_r$  пропорциональна  $q^2$ , поэтому излучение, связанное с коллективными эффектами, может быть много больше, чем излучение из плазмы, находящейся в термодинамическом равновесии, когда считается, что отдельные частицы движутся независимо друг от друга. Более детальный анализ этих явлений можно найти в обзоре Бекефи и Брауна [191].

## 5. 2. Спектр излучения отдельной частицы

Рассмотрим спектр излучения релятивистской частицы, вращающейся в однородном магнитном поле (рис. 10.4). Решение уравнения движения (9.28) для одной частицы при  $\vec{E}=0$  имеет вид



$$\vec{\rho}^* = \left( \frac{W}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \right.$$

$$\left. \frac{W}{\omega_0} \cos \omega_0 t, u_{\parallel} t \right), \quad (10.28)$$

где  $\omega_0 = \frac{qB}{m\gamma(\omega)}$ ,  $\omega^2 = W^2 + u_{\parallel}^2$ , а  $W$  и  $u_{\parallel}$  — постоянные скорости.

Воспользуемся выражением (10.2) для векторного потенциала поля, создаваемого частицей [208]:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{q\vec{\omega}}{R^* - \frac{\vec{\omega} R^*}{c}} \right]_{t^*}. \quad (10.29)$$

Величина в квадратных скобках берется в момент времени  $t^* = t - R^*/c$ . Введем компоненты Фурье потенциала обычным образом

$$\vec{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}_{\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad \vec{A}_{\omega} = \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A} e^{-i\omega t} dt. \quad (10.30)$$

В волновой зоне, т. е. на больших расстояниях  $\rho$  от точки 0 (рис. 10.4), введем систему координат так, чтобы волновой вектор имел всего две компоненты

$$\vec{k} = \vec{k}(\sin \theta, 0, \cos \theta) = \frac{\hat{\Lambda} k}{c}. \quad (10.31)$$

Тогда в волновой зоне в точке наблюдения  $P$ , где  $\rho \gg \rho^*$ , получим

$$R^* \approx \hat{\Lambda} \vec{k} R^* = \hat{\Lambda} k (\rho - \rho^*). \quad (10.32)$$

На таких расстояниях можно пренебречь малыми изменениями в знаменателе формулы (10.29) за счет  $\vec{\omega} \cdot \vec{R}^*/c$ , положив  $R^* = \rho$ . Однако следует сохранить малые члены в числителе формулы (10.29), так как их действие проявляется в более низком порядке [16]. Теперь можно определить величину  $\vec{A}_{\omega}$

$$\vec{A}_{\omega} \approx \frac{\mu_0 q \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{\rho})}{8\pi^2 \rho} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\omega}(t) \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{\rho}^* - \omega t)] dt. \quad (10.33)$$

Из соотношений (10.28), (10.31), а также из того, что  $\omega = d\rho^*/dt$ , следует

$$\begin{aligned} \vec{A}_{\omega} = & \frac{\mu_0 q \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{\rho})}{8\pi^2 \rho} \int_{-\infty}^{\infty} (W \cos \omega_0 t, -W \sin \omega_0 t, u_{\parallel}) \times \\ & \times \exp \left[ i \frac{\omega}{c} \left( \frac{W}{\omega_0} \sin \theta \sin \omega_0 t + u_{\parallel} t \cos \theta - ct \right) \right] dt. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Упростим этот результат при помощи следующих соотношений для функций Бесселя

$$e^{i\chi \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} J_n(\chi), \quad (10.35)$$

$$J_{n-1}(\chi) + J_{n+1}(\chi) = 2 \frac{-n}{\chi} J_n(\chi), \quad (10.36)$$

$$2J'_n = 2dJ_n \frac{\chi}{d\chi} J_{n-1}(\chi) - J_{n+1}(\chi), \quad (10.37)$$

а также известного разложения  $\delta$ -функции

$$\delta(t - t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega(t - t_1)] d\omega. \quad (10.38)$$

Проведя соответствующие преобразования, получаем

$$A_{\omega x} = \frac{\mu_0 c q \exp(-i \vec{k} \cdot \vec{\rho})}{4\pi\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \frac{v_{\parallel}}{c} \cos \theta}{\sin \theta} J_n \times \\ \times \left( \frac{\omega W}{\omega c} \sin \theta \right) \delta_n, \quad (10.39)$$

$$A_{\omega y} = \frac{\mu_0 c q \exp(-i \vec{k} \cdot \vec{\rho})}{4\pi\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i) \frac{W}{c} J'_n \left( \frac{\omega W}{\omega_0 c} \sin \theta \right) \delta_n, \quad (10.40)$$

$$A_{\omega z} = \frac{\mu_0 c q \exp(-i \vec{k} \cdot \vec{\rho})}{4\pi\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{u_{\parallel}}{c} J_n \left( \frac{\omega W}{\omega_0 c} \sin \theta \right) \delta_n, \quad (10.41)$$

где  $J_n$  и  $J'_n$  — функции величины, заключенной в последних скобках в соотношениях (10.39) — (10.41), а

$$\delta_n = \delta \left( \omega \frac{u_{\parallel}}{c} \cos \theta - \omega + n\omega_0 \right). \quad (10.42)$$

Отметим, что так как  $\delta$ -функция отлична от нуля лишь при обращении ее аргумента в нуль, то будет излучаться следующий спектр частот

$$\omega_n = \frac{n\omega_0}{1 - \frac{u_{\parallel}}{c} \cos \theta}. \quad (10.43)$$

Согласно теореме Пойнтинга полная мощность излучения через единицу площади в направлении  $\vec{k}$  определяется следующим выражением:

$$\left| \vec{E} \times \text{rot} \frac{\vec{A}}{\mu_0} \right| = \frac{\omega}{\mu_0} \left| \vec{A} \times (\vec{k} \times \vec{A}) \right| = c \frac{|\vec{k} \times \vec{A}|^2}{\mu_0}, \quad (10.44)$$

так как  $\vec{k} \vec{A} = 0$ ,  $\omega = kc$ . Аналогично можно определить энергию  $n$ -й гармоники, приходящуюся на единицу телесного угла  $Y$  и на единичный интервал частот за время  $t = -\infty$  до  $t = +\infty$

$$\left( \frac{d^2 \epsilon_{rc}}{dY d\omega} \right)_n = 4\pi r^2 c \left| \vec{k} \times \vec{A}_{\omega n} \right|^2 \mu_0. \quad (10.45)$$

Здесь  $A_{\omega n}$  — слагаемое, соответствующее индексу  $n$  в соотношениях (10.39) — (10.42).

Рассмотрим колебание с частотой  $\omega_n$  за промежуток времени  $t_0$ , определяемое следующим образом:

$$f(t) \cos \omega_n t \text{ для } |t| < \frac{1}{2} t_0, \quad f(t) = 0 \text{ для } |t| > \frac{1}{2} t_0. \quad (10.46)$$

Функцию  $f(t)$  можно разложить в интеграл Фурье по времени

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (10.47)$$

При этом

$$g(\omega) = \left( \frac{1}{2\pi} \right) \int_{-1/2 t_0}^{1/2 t_0} \exp[i(\omega_n - \omega)t] dt = \frac{\sin \left[ \frac{1}{2} (\omega_n - \omega)t \right]}{\pi (\omega_n - \omega)}. \quad (10.48)$$

Когда  $\omega$  стремится к  $\omega_n$ , правая часть соотношения (10.48) стремится к  $t_0/2\pi$ . Если предположить, что промежуток времени  $t_0$  при этом стремится к бесконечности, то из определения  $\delta$ -функции (10.38) и функции  $g(\omega)$  [формула (10.48)] следует, что длительность периода излучения для  $n$ -й гармоники можно записать в виде  $2\pi\delta_n$ . Разделив формулу (10.45) на эту величину и воспользовавшись соотношениями (10.39) — (10.42),

окончательно получим формулу для мощности излучения  $n$ -й гармоники в единицу телесного угла и в единичный интервал частот  $\omega$ :

$$I_{\omega}^n = (\theta) = \frac{q^2 \omega^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 c} \left[ \left( \frac{\cos \theta - \frac{u_{\parallel}}{c}}{\sin \theta} \right)^2 J_n^2 \left( \frac{\omega W}{\omega_0 c} \sin \theta \right) + \left( \frac{W}{c} \right)^2 J_n'^2 \left( \frac{\omega W}{\omega_0 c} \sin \theta \right) \right] \cdot \delta_n, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (10.49)$$

Член, соответствующий  $n=0$ , обращается в нуль, а члены при  $n < 0$  можно включить в выражение (10.49) для симметрии. Полная мощность излучения составит

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\omega}^{(n)}(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta d\omega. \quad (10.50)$$

Можно показать, что этот результат согласуется с ранее полученным результатом (10.22) (ср. с результатом Б. А. Трубникова [207]).

Из детального исследования соотношения (10.49) следует, что при  $\omega/c \ll 1$  интенсивность гармоник уменьшается с увеличением  $n$ . В то же время, когда  $\omega/c$  стремится к единице, спектр состоит из большого числа гармоник.

### 5. 3. Коэффициент излучения

Тот факт, что полную мощность циклотронного излучения из плазмы можно получить простым суммированием вкладов от всех электронов, вовсе не является очевидным, так как в плотной плазме волны, излученные отдельными электронами, могут интерферировать между собой. Однако тщательное исследование этого вопроса, проведенное Драммондом и Розенблютом [210], а также Роузом и Кларком [16], показало, что при условиях, необходимых для термоядерных реакций, движение отдельных электронов можно считать независимым. Условие применимости такого приближения состоит в том, что частоты гармоник излучаемого спектра должны быть больше плазменной частоты  $\omega_p = (e^2 n / \varepsilon_0 m_e)^{1/2}$  (см. также работу [211]).

Движения электронов могут быть не скоррелированными по двум причинам. Во-первых, так как электроны находятся каждый в своей дебаевской сфере радиуса  $(kT\epsilon_0/ne^2)^{1/2}$  в течение времени  $\sim 1/\omega_p$ , то их движения независимы на более долгий промежуток времени, если усреднение производится по большому числу циклотронных вращений. Во-вторых, движения не скоррелированы, если кинетическая энергия электронов много больше энергии электромагнитного излучения. В этом случае движение частиц быстро становится хаотическим, и коллективные движения подавляются.

Исследуем теперь излучение в направлении, перпендикулярном магнитному полю, положив для этого  $\theta = 1/2\pi$ . Соотношения (10.39) — (10.42) равны

$$A_{\omega x} = \frac{\mu_0 c q}{4\pi\rho} \exp(-ik\rho) \sum_{n=-1}^{\infty} J_n(\omega W/\omega_0 c) \delta_n(n\omega_0 - \omega) = \\ = A_{\omega z} \frac{c}{u_{\parallel}}, \quad (10.51)$$

$$A_{\omega y} = \frac{\mu_0 c q \exp(-ik\rho)}{4\pi\rho} \sum_{n=-1}^{\infty} (-i) \frac{\omega W}{c} J'_n(\omega W/\omega_0 c) \delta_n(n\omega_0 - \omega). \quad (10.52)$$

Мощность излучения определим из выражения (10.49)

$$I_{\omega} \frac{1}{2} \pi \equiv I_{\omega}^{(\parallel)} \frac{1}{2} \pi + I_{\omega}^{(\perp)} \frac{1}{2} \pi = \frac{q^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (u_{\parallel}/c)^2 \times \right. \\ \left. \times J_n^2(\omega W/\omega_0 c) + \left(\frac{W}{c}\right)^2 J_n'^2 \frac{\omega W}{\omega_0 c} \right] \delta(n\omega_0 - \omega). \quad (10.53)$$

Отметим, что слагаемые, содержащие  $J_n$ , соответствуют  $A_{\omega z}$  и описывают обыкновенные волны, в которых электрическое поле  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  имеет компоненту, параллельную внешнему магнитному полю. Слагаемые, содержащие  $J'_n$ , соответствуют  $A_{\omega y}$  и представляют собой необыкновенные волны, в которых электрическое поле  $\vec{E}$  перпендикулярно внешнему магнитному полю.

Именно эти два типа волн дают вклады в слагаемые, обозначенные  $I_{\omega}^{(\parallel)} \left( \frac{1}{2} \pi \right)$  и  $I_{\omega}^{(\perp)} \left( \frac{1}{2} \pi \right)$  соответственно, в соотношении (10.53).

Коэффициенты излучения для этих двух типов волн можно определить, интегрируя соответствующую мощность излучения [см. соотношение (10.53)] с учетом распределения частиц по импульсам в релятивистском пределе. В результате имеем

$$\gamma_{\omega}^{(\parallel, \perp)} \frac{1}{2} \pi = \iiint I_{\omega}^{(\parallel, \perp)} \frac{1}{2} \pi f(\vec{P}) dP_x dP_y dP_z \quad (10.54)$$

на единичный телесный угол, на единицу объема и на единичный интервал  $\omega$  в поперечном направлении. Знаки  $\parallel$  и  $\perp$  относятся соответственно к обыкновенным и необыкновенным волнам.

В нерелятивистском случае, который особенно интересен в связи с задачами по управляемому термоядерному синтезу, при помощи соотношений (10.23), (10.53), (10.54), после некоторых преобразований можно получить следующий результат (ср. с работой [207]):

$$\begin{aligned} \gamma_{\omega}^{(\parallel, \perp)} \approx & \frac{e^2 n_e \mu_r^{3/2} \omega_e \left( 2 \frac{\omega_e}{\omega} \right)^{1/2}}{32 \pi^3 \epsilon_0 c} \sum_{n > \omega/\omega_e}^{\infty} \left\{ \left( \frac{n^2 \omega_e^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/2} \times \right. \\ & \times \left( \frac{n - \frac{\omega}{\omega_e}}{n + \frac{\omega}{\omega_e}} \right)^n \left[ \frac{n^2 - \frac{\omega^2}{\omega_e^2}}{2 \frac{\omega^3}{\omega_e^3}}, 1 \right] \exp \left[ -\mu_r \left( \frac{n \omega_e}{\omega} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 1 \right) + \frac{2\omega}{\omega_e} \right] \left. \right\}. \quad (10.55) \end{aligned}$$

Здесь  $n_e$  — плотность электронов,  $\omega_e = eB/m_e$ , а  $\mu_r = mc^2/kT_e$ . Величины, отделенные запятой в первой квадратной скобке, относятся соответственно к обыкно-



венной и необыкновенной волнам. Численный расчет по формуле (10.55) проведен в работах [207, 212]. В результате получается набор гармоник, которые слегка расширяются из-за эффекта Допплера, соответствующего релятивистскому изменению импульса частицы. При высоких частотах гармоники перекрываются настолько сильно, что полная эмиссия становится монотонно убывающей функцией частоты.

#### 5. 4. Коэффициент поглощения

Предположим, что плазма находится в термодинамическом равновесии. Иными словами, излучение и поглощение энергии в любом малом объеме плазмы будут такими же, как в том случае, когда вся система находится в термодинамическом равновесии. При этом коэффициенты поглощения и излучения связаны между собой законом Кирхгофа. Следовательно, коэффициенты поглощения  $\alpha_{\omega}^{\parallel, \perp}$  определяются из соотношения

$$I_0 \equiv \eta_{\omega}^{\parallel, \perp}(\theta) / \alpha_{\omega}^{\parallel, \perp}(\theta) = h\omega^3 / 8\pi^3 c^2 \left[ \exp \frac{h\omega}{kT_e} - 1 \right]. \quad (10.56)$$

Теперь рассмотрим случай, когда  $\theta = \frac{1}{2} \pi$ .

Обычно в практически интересной области для циклотронного излучения  $h\omega/kT_e \ll 1$ . Так, например, при напряженности магнитного поля  $B \sim 5$  в.сек/м<sup>3</sup> и температуре  $T_e \sim 5 \cdot 10^4$  эв величина  $h\omega/kT_e \approx 10^{-8}$ . Далее будет показано, что при  $\omega/\omega_e \gg \left(\frac{1}{2} \nu_r\right)^{3/2}$  ширина спектральных линий становится сравнимой с расстоянием между линиями и спектр оказывается почти непрерывным. В практически интересных случаях спектр можно считать непрерывным для всех гармоник, кроме первых.

Так как радиационные потери энергии в основном определяются высшими гармониками, то достаточно рассмотреть непрерывную часть спектра. Воспользовавшись соотношением (10.6) и приближенно заменив сумму в формуле (10.55) на интеграл Б. А. Трубников

[207], вычислив интеграл при помощи метода перевала, получил

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega}^{(\parallel, \perp)} \left( \frac{1}{2} \pi \right) &= 3\omega_p^2 (\pi \mu_r)^{1/2} (2c\omega_e x_r)^{-1} \exp \times \\ &\times \left[ -\mu_r \left( x_r^{1/3} - 1 + \frac{9}{20} x_r^{1/3} \right) \right] \times [\mu_r^{-1} x_r^{-1/3}, 1], \quad x_r = \\ &= 9\omega k T_e 2\omega_e m c^2 \gg 1 \end{aligned} \quad (10.57)$$

и

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega}^{(\parallel, \perp)} \left( \frac{1}{2} \pi \right) &= \omega_p^2 \mu_r \left( \frac{\pi \omega_e}{2\omega} \right)^{1/2} (c\omega_e)^{-1} \left( \frac{e\omega}{2\mu_r \omega_e} \right)^{\omega/\omega_e} \times \\ &\times [\mu_r^{-1}, 1], \quad x_r \ll 1. \end{aligned} \quad (10.58)$$

Здесь  $\omega_p$  — плазменная частота. Для соотношений (10.57), (10.58) обыкновенная волна затухает гораздо меньше, чем необыкновенная, если скорость электронов много меньше скорости света. Мы вычислили мощности излучения, просуммировав коэффициенты излучения для отдельной частицы, пользуясь понятием распределения частиц по скоростям. Эквивалентный метод был развит Драммондом и Розенблютом [210], которые исходили из бесстолкновительного уравнения Больцмана. Они определили коэффициент поглощения для поперечных электромагнитных волн непосредственно из уравнения Больцмана, а далее при помощи закона Кирхгофа получили выражение для коэффициента излучения.

Зависимость коэффициента поглощения от угла была определена в работах [210, 213].

## 5. 5. Излучение из плоского слоя плазмы

Теперь рассмотрим излучение из плоского слоя плазмы, изображенного на рис. 10.5, а. Пусть  $x_0$  — толщина слоя, а магнитное поле параллельно плоскостям, ограничивающим слой. Будем считать, что поле создается внешними источниками. Для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в направлении  $\theta$ , волновой вектор  $\vec{k}$  составляет с направлением единичного вектора  $\vec{n}$  угол  $\lambda_n$ . Введем координату  $x$  вдоль направления вектора  $\mathbf{n}$  так, как показано на рис. 10.5.

Когда плазма находится в тепловом равновесии, уравнение для переноса энергии излучения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial l} I_{\omega}^{(\nu)}(\theta) = \gamma_{\omega}^{(\nu)}(\theta) - \alpha_{\omega}^{(\nu)}(\theta) I_{\omega}^{(\nu)}(\theta), \quad (\nu = \parallel, \perp), \quad (10.59)$$

где координата  $l$  отсчитывается в направлении распространения волны, а индекс  $\nu$  обозначает поляризацию. Коэффициенты излучения и поглощения связаны соот-

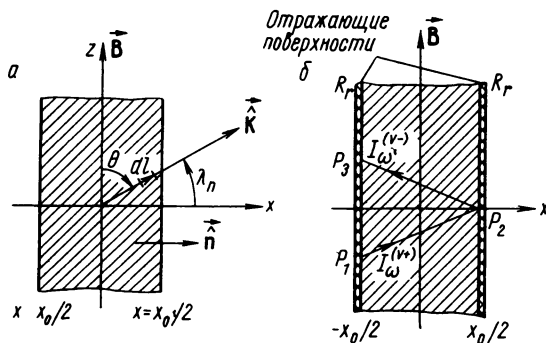


Рис. 10.5. Излучение из плоского слоя плазмы толщиной  $x_0$ , помещенного в магнитное поле  $\vec{B}$ , параллельное плоскостям, ограничивающим плазму:

$a$  — определение углов  $\theta$  и  $\lambda_n$ ;  $b$  — плазма

ношением (10.56), в котором мы по-прежнему будем считать, что  $h\omega/kT_e \ll 1$ . Воспользовавшись соотношением (10.56), проинтегрируем уравнение (10.59) по  $l$  для заданных значений  $\theta$  и  $\lambda_n$ . В результате

$$I_{\omega}^{(\nu+)}(\theta, x) = I_0 + c_+ \exp \left[ -\alpha_{\omega}^{(\nu)}(\theta) \frac{x}{\cos \lambda_n} \right] \quad (10.60)$$

для излучения в положительном направлении оси  $x$  и

$$I_{\omega}^{(\nu-)}(\theta, x) = I_0 + c_- \exp \left[ \alpha_{\omega}^{(\nu)}(\theta) \frac{x}{\cos \lambda_n} \right] \quad (10.61)$$

для излучения в отрицательном направлении оси  $x$ . Здесь  $c_+$  и  $c_-$  константы интегрирования.

Пусть теперь плоский слой ограничен двумя отражающими поверхностями, расположенными при  $x =$

$= \pm \frac{1}{2} x_0$  (см. рис.10.5, б). Предположим, что излучение распространяется из точки  $P_1$  и затухает. Когда излучение достигнет точки  $P_2$ , часть энергии, равная  $R_r$ , отразится, пересечет плазму в отрицательном направлении оси  $x$  и достигнет точки  $P_3$ . Наложим два граничных условия на решения (10.60) и (10.61), воспользовавшись соотношениями симметрии

$$I_{\omega}^{(+)} \left( \theta, -\frac{1}{2} x_0 \right) = R_r I_{\omega}^{(-)} \left( \theta, -\frac{1}{2} x_0 \right) \quad (10.62)$$

и

$$I_{\omega}^{(-)} \left( \theta, \frac{1}{2} x_0 \right) = R_r I_{\omega}^{(+)} \left( \theta, \frac{1}{2} x_0 \right). \quad (10.63)$$

Из этих соотношений можно определить константы  $c_+$  и  $c_-$ . Интенсивность  $I_{\text{эфф}}$ , с которой связан уход энергии из плазмы, определяется интенсивностью излучения, выходящей из плазмы в точке  $P_2$ , т. е.

$$\begin{aligned} I_{\text{эфф}}^{(\nu)}(\omega, \theta, \lambda_n, x_0 R_r) &= (1 - R_r) I_{\omega}^{(+)} \left( \theta, \frac{1}{2} x_0 \right) = \\ &= I_0 (1 - R_r) \frac{1 - \exp \left[ -\alpha_{\omega}^{(\nu)} \frac{x_0}{\cos \lambda_n} \right]}{1 - R_r \exp \left[ -\alpha_{\omega}^{(\nu)} \frac{x_0}{\cos \lambda_n} \right]}. \end{aligned} \quad (10.64)$$

Соотношение (10.64) было получено в работах [207, 210]. В этих работах авторы предлагали использовать отражатели для уменьшения потерь из-за циклотронного излучения. Для частот  $\omega$ , при которых коэффициент отражения  $R_r$  близок к единице, из формулы (10.64) следует, что интенсивность излучения много меньше  $I_0$ , интенсивности излучения для абсолютно черного тела без отражателей. Мы нашли, что в нерелятивистском пределе значительная часть энергии излучения содержится в высших гармониках спектра. К сожалению, для этих гармоник коэффициент поглощения оказывается совсем малым, и  $\alpha_{\omega}^{(\nu)} x_0 \ll 1$ . Из этой формулы (10.64) получаем

$$I_{\text{эфф}} \approx I_0 \left( \alpha_{\omega}^{(\nu)} x_0 / \cos \lambda_n \right) \cdot \left[ 1 + \frac{R_r \left( \alpha_{\omega}^{(\nu)} x_0 / \cos \lambda_n \right)}{1 - R_r} \right]^{-1}. \quad (10.65)$$

Возможны два случая.

1. Если поглощение очень мало, а рефлекторы не слишком хороши, то величина  $R_r(\alpha_\omega^* x_0/\cos \lambda_n)/(1-R_2)$  много меньше единицы и  $I_{эфф}$  стремится к значению, определяемому соотношением (10.64) при  $R_r=0$ , т. е. отражательные поверхности отсутствуют. Этот случай был исследован в работе [212], где приведены значения коэффициентов поглощения в широкой области спектра.

2. Если величина  $R_r$  близка к единице настолько, что даже для высших гармоник спектра выполняется соотношение  $R_r(\alpha_\omega^* x_0/\cos \lambda_n)/(1-R_r) \ll 1$ , то эффективная интенсивность излучения равна  $I_0(1-R_r)$  и потери за счет излучения из плазмы значительно снижаются.

## 5. 6. *Баланс энергии в термоядерном реакторе*

Найдем полную мощность излучения  $\Pi_{rc}$ , отнесенную к единице площади плоского слоя плазмы. Для этого необходимо проинтегрировать выражение (10.64) для обоих направлений поляризации. Интегрирование нужно проводить по поверхности плоского слоя, по полупространству и по всем частотам:

$$\Pi_{rc} = \int_0^\infty \int_{\lambda_n=0}^{1/2\pi} (I_{эфф}^{(\parallel)} + I_{эфф}^{(\perp)}) \cos \lambda_n dY d\omega. \quad (10.66)$$

Если бы плазма была полностью прозрачна, то мощность, отнесенная к единице объема  $P_{rc}$ , определялась бы выражением (10.24). Для элемента объема плоского слоя толщиной  $x_0$  и площадью  $dS$  излучаемая при этом мощность в отсутствие поглощения и отражателей была бы равна  $P_{rc}x_0dS$ .

В действительности эффективные радиационные потери из этого элемента равны  $2\Pi_{rc}dS$ .

Введем эффективный коэффициент прозрачности

$$K_{rc} = 2 \frac{\Pi_{rc}}{P_{rc}x_0}. \quad (10.67)$$

Если  $\alpha_\omega^{(v)}x \rightarrow 0$ , а  $(1-R_r) \neq 0$ , то из соотношений (10.65), (10.66) и (10.56) следует, что

$$2\Pi_{rc}(\alpha_\omega^{(v)}, x_0 = 0) = 2 \int_0^\infty \int_{\lambda_n=0}^{1/2\pi} x_0 [\eta_\omega^{(\parallel)}(\theta) + \eta_\omega^{(\perp)}] dY d\omega. \quad (10.68)$$

Это выражение определяет полную мощность  $P_{rc}x_0$ , излученную внутри плоского слоя на единицу площади  $dS$ . Как и следовало ожидать, в этом случае коэффициент прозрачности обращается в единицу. Таким образом,

$$\begin{aligned}
 K_{rc} \int_0^\infty \int_{\lambda_n=0}^{1/2\pi} x_0 [\eta_\omega^{(\parallel)}(\theta) + \eta_\omega^{(\perp)}(\theta)] dY d\omega = \\
 = \int_0^\infty \int_{\lambda_n=0}^{1/2\pi} I_0 (1 - R_r) \cos \lambda_n \left\{ \frac{1 - \exp[-\alpha_\omega^{(\parallel)} x_0 / \cos \lambda_n]}{1 - R_r \exp[\alpha_\omega^{(\parallel)} x_0 / \cos \lambda_n]} + \right. \\
 \left. + \frac{1 - \exp[-\alpha_\omega^{(\perp)} x_0 / \cos \lambda_n]}{1 - R_r \exp[\alpha_\omega^{(\parallel)} x_0 / \cos \lambda_n]} \right\} dY d\omega. \quad (10.69)
 \end{aligned}$$

Пусть радиационные потери из данного элемента объема равны мощности  $P_s$ , полученной за счет термоядерной реакции в данном элементе объема. Таким образом, величины  $P_s x_0 dS$  и  $2\Pi_{rc} dS$  равны; следовательно, можно ввести понятие критического коэффициента прозрачности

$$K_{rc}^* = \frac{P_s}{P_{rc}}. \quad (10.70)$$

Результаты этого параграфа можно использовать для расчета толщины  $x_0^*$  плоского слоя, при которой полученная во время реакции мощность равна потерям из-за циклотронного излучения. Б. А. Трубников [208], предположив, что все излучение с частотами  $\omega$  выше некоторой, определяемой из равенства  $\alpha_\omega^* x_0 = 1$ , свободно выходит из системы, вычислил  $x_0^*$ . Затем, оценив угловое распределение излучения, он использовал полученное выражение для определения  $K_{rc}$ . При этом величина  $K_{rc}$  оказалась равной половине той, которая получилась бы, если бы коэффициенты  $\alpha_\omega^{(\nu)} \left( \frac{1}{2} \pi \right)$  для поперечной

поляризации [см. (10.57) и (10.58)] были подставлены в уравнение (10.69) вместо  $\alpha_{\omega}^{(\nu)}(\theta)$ .

В результате была найдена система уравнений (10.24), (10.56)—(10.58), (10.69) и (10.70), из которой можно определить  $x_0^*$ . Численные расчеты, проделанные Б. А. Трубниковым и В. С. Кудрявцевым [208], показывают, что для термоядерного реактора размеры слоя плазмы оказываются очень большими. Например, при  $B=1$  в·сек/м<sup>2</sup>  $T_i=T_e$ , когда давление плазмы равно плотности магнитной энергии  $B^2/2\mu_0$ , и при плотности частиц  $n \sim 10^{19}$  м<sup>-3</sup> соответствующий размер  $x_0^*$  для дейтериевой плазмы оказывается больше 20 м.

Этот результат привлек внимание некоторых исследователей к изучению проблемы отыскания методов, позволяющих уменьшить критический размер (см. работы [210, 211, 214, 215]). Окончательно задача еще не решена, однако, согласно недавно появившимся работам [210, 215], критический размер слоя можно сделать меньше 1 м, используя отражающие плоскости. Вопрос использования сверхпроводящих материалов для увеличения коэффициента отражения, разумеется, заслуживает внимания, однако здесь не рассматривается.

Следует отметить также, что скорость реакции для смеси дейтерия и трития в 10 раз больше, чем для дейтериевой плазмы. Поэтому для такой смеси радиационные потери сбалансированы даже при небольших размерах  $x_0^*$  плазмы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B}/\mu_0 = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \sigma/\epsilon_0 \quad (2.7)$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (2.8)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.10)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \quad (2.17)$$

$$\vec{\nabla}^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\sigma/\epsilon_0 \quad (2.18)$$

$$\vec{A}(\vec{\rho}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{\rho}^*, t - R^*/c)}{R^*} dV^* \quad (2.19)$$

$$\varphi(\vec{\rho}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{\rho}^*, t - R^*/c)}{R^*} dV^* \quad (2.20)$$

$$\vec{A} = \alpha \vec{\nabla}\beta + \vec{\nabla}\chi \quad (2.21)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\alpha \times \vec{\nabla}\beta \quad (2.22)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \left( \varphi + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) + \frac{\partial \beta}{\partial t} \vec{\nabla}\alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \vec{\nabla}\beta \quad (2.23)$$

$$E_{\parallel} = -\frac{\partial}{\partial s} \left( \varphi + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \quad (2.24)$$

$$m \frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{F} + q\vec{w} \times \vec{B} \quad (2.36)$$



$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(q\varphi + m\varphi_g) - q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = q\vec{E} - m\vec{\nabla}\varphi_g \quad (2.37)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\omega^2 \right) = \vec{F} \cdot \vec{\omega} \quad (2.38)$$

$$k_1 \frac{d^2 \rho'}{dt'^2} = -k_2 \vec{\nabla}' \varphi' - k_3 \vec{\nabla}' \varphi'_g - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t'} + \frac{d\rho'}{dt'} \times \text{rot}' \vec{A}' \quad (2.42)$$

$$k_1 = mZ_c/qA_c t_c; \quad k_2 = t_c \varphi_c / A_c L_c; \quad k_3 = m t_c \varphi_{gc} / q A_c L_c \quad (2.43)$$

$$L = \frac{1}{2} m\omega^2 - m\varphi_g - q\varphi + q\vec{\omega} \cdot \vec{A} \quad (2.47)$$

$$p_k = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (2.51)$$

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (2.52)$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (2.56)$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (2.57)$$

$$p_k = \frac{\partial G_2}{\partial q_k}; \quad q'_k = \frac{\partial G_2}{\partial p'_k}; \quad H' = H + \frac{\partial G_2}{\partial t} \quad (2.58)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{\partial \chi}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial \chi}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \chi}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = \frac{\partial \chi}{\partial t} + \{\chi, H\} \quad (2.59)$$

$$p_k = m\omega_k + qA_k \quad (2.61)$$

$$H = \frac{1}{2} m\omega^2 + q\varphi + m\varphi_g \quad (2.62)$$

$$q_k = q_k[\Theta(t), t]; \quad p_k = p_k[\Theta(t), t] \quad (2.64)$$

$$J^* = \sum_{k=1}^n J_k^* = \text{const}, \quad J_k^* = \oint \left[ p_k \frac{\partial q_k}{\partial \Theta} \right]_t d\Theta \quad (2.71)$$

$$\vec{a} = \frac{1}{\omega_g} \widehat{B} \times \vec{W}_0 \cos \omega_g t + \frac{1}{\omega_g} \vec{W}_0 \sin \omega_g t;$$

$$\vec{W}_0 = (\omega_{x0}, \omega_{y0}, 0) \quad (2.80)$$

$$\vec{W} = d\vec{a}/dt = \omega_g \vec{a} \times \hat{B} \quad (2.82)$$

$$\vec{M} = -\frac{1}{2} m\vec{B} (W_0/B)^2 \quad (2.83)$$

$$a \left| \frac{\partial B_j}{\partial x_k} \right| \Big/ |B_j| \ll 1 \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{\omega_g} \left| \frac{dB_j}{dt} \right| \Big/ |B_j| \ll 1 \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{F}/q + \vec{w} \times \vec{B}, \quad \varepsilon = m/q, \quad \vec{w} = d\vec{\rho}/dt \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \rho(t) = \vec{C}(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \{ \vec{C}_\nu(t) \cos[\nu\theta(t)/\varepsilon] + \\ + \vec{S}_\nu(t) \sin[\nu\theta(t)/\varepsilon] \} = \vec{C}(t) + \vec{a}(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\vec{u} = d\vec{C}/dt; \quad \vec{W} = d\vec{a}/dt; \quad \vec{w} = \vec{u} + \vec{W} \quad (3.9)$$

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} + q\vec{u} \times \vec{B} - M\nabla B; \quad M = mW^2/2B \quad (3.16)$$

$$m\hat{B} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} \cdot \hat{B} - M(\hat{B} \cdot \nabla) B \quad (3.17)$$

$$\vec{u}_\perp = \left( \vec{F} - M\nabla B - m \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \times \vec{B}/qB^2 \quad (3.18)$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = u_\parallel \frac{d\vec{u}_\parallel}{dt} + \hat{u}_\parallel \cdot \frac{du_\parallel}{dt} + \frac{d\vec{u}_\perp}{dt} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} d\vec{u}_\parallel \hat{u}_\parallel = \hat{u}_\parallel - u_\parallel \hat{u}_\parallel = \hat{B} - \hat{B}_0 = (|R| d\theta \hat{B} \cdot \nabla) \hat{B} = \\ = u_\parallel (\hat{B} \cdot \nabla) \hat{B} dt \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$(\hat{B} \cdot \nabla) \hat{B} = -\hat{B} \times \text{rot} \hat{B} = (B\nabla_\perp B - \vec{B} \times \text{rot} \vec{B})/B^2 \quad (3.21)$$

$$\vec{u}_{\perp} = \left[ \vec{F} - M(1 + 2u_{\parallel}^2/W^2) \vec{\nabla} B - m \frac{d\vec{u}_{\perp}}{dt} \right] \times \vec{B}/qB^2 + (2Mu_{\parallel}^2/W^2qB) (\text{rot } \vec{B})_{\perp} \quad (3.22)$$

$$\vec{u}_F = \vec{F} \times \vec{B}/qB^2 \quad (\text{дрейф под действием внешней силы}) \quad (3.23)$$

$$\vec{u}_B = [M(1 + 2u_{\parallel}^2/W^2)/qB^2] \vec{B} \times \vec{\nabla} B \quad (\text{градиентный дрейф}) \quad (3.24)$$

$$\vec{u}_m = (m/qB^2) \vec{B} \times \frac{d\vec{u}_{\perp}}{dt} \quad (\text{поперечный инерционный дрейф}) \quad (3.25)$$

$$\vec{u}_E = \vec{E} \times \vec{B}/B^2 \quad (\text{электрический дрейф}) \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_p &= (mj qB^4) \vec{B} \times \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} \right) = \\ &= (m/qB^2) \frac{\partial \vec{E}_{\perp}}{\partial t} \quad (\text{поляризационный дрейф}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \dot{\ddot{2}} \vec{C}_1 + \dot{\ddot{1}} \vec{S}_1 \times \vec{B} &= \varepsilon (2\dot{\ddot{1}} \vec{S}_1 + \ddot{\ddot{1}} \vec{S}_1 - \vec{C}_1 \times \vec{B}) - \\ &- \varepsilon \dot{\vec{C}} \times [(\vec{C}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}] - \varepsilon (\vec{C}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{F}/q + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{\ddot{3}} \vec{S}_1 - \dot{\ddot{2}} \vec{C} \times \vec{B} &= -\varepsilon (2\dot{\ddot{2}} \vec{C}_1 + \ddot{\ddot{2}} \vec{C}_1 + \vec{S}_1 \times \vec{B}) - \\ &- \varepsilon \dot{\vec{C}} \times [(\vec{S}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}] - \varepsilon (\vec{S}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{F}/q + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\vec{F} = -q\dot{\vec{C}} \times \vec{B} + O(\varepsilon); \quad \vec{F} \cdot \vec{B} = O(\varepsilon) \quad (3.34)$$

$$\vec{C}_1 \cdot \vec{B} = O(\varepsilon); \quad \vec{S}_1 \cdot \vec{B} = O(\varepsilon); \quad \vec{C}_1 \cdot \vec{S}_1 = O(\varepsilon) \quad (3.35)$$

$$C_1^2 = S_1^2 + O(\varepsilon) \quad (3.36)$$

$$\dot{\ddot{1}} = B + O(\varepsilon) \quad (3.37)$$

$$\vec{a} = \varepsilon \vec{C}_1 \cos \omega_g t + \varepsilon \vec{S}_1 \sin \omega_g t + O(\varepsilon) \quad (3.38)$$

$$\varepsilon \vec{C}_1 = \widehat{B} \times \vec{W}_0/\omega_g; \quad \varepsilon \vec{S}_1 = \vec{W}_0/\omega_g \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} &= \left(1 + \frac{1}{4} a^2 \vec{v}_\perp^2\right) \vec{F} + q\vec{u} \times \vec{B} - \\ &- M \vec{\nabla} B + O(\varepsilon^2 \vec{B}) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$n\vec{v} = n\vec{u} + \text{rot}(n\vec{M}/q) \quad (3.43)$$

$$i_\parallel = \frac{1}{2} \overline{mu_\parallel^2} = \frac{1}{2} m \left( \overline{u_\parallel^2} + \overline{\tilde{u}_\parallel^2} \right); \quad K_\perp = \frac{1}{2} m \overline{W^2} \quad (3.45)$$

$$n\vec{v}_\parallel = n\vec{u}_\parallel - nK_\perp (\text{rot } \vec{B})_\parallel / qB^2 \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} n\vec{v}_\perp &= n\vec{F} \times \vec{B} / qB^2 + n(K_\perp - 2K_\parallel) (\vec{\nabla} B - \widehat{B} \times \text{rot } \vec{B}) \times \\ &\times \vec{B} / qB^3 - \vec{\nabla} (nK_\perp) \times \vec{B} / qB^2 - nm \frac{d\vec{u}_\perp}{dt} \times \vec{B} / qB^2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} nm \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right]_\parallel &= n\vec{F}_\parallel - (n/B) (K_\perp - 2K_\parallel) \times \\ &\times \vec{\nabla}_\parallel B - \vec{\nabla}_\parallel (2nK_\parallel) \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\varepsilon_{eq} = (n_i m_i + n_e m_e) / B^2 \quad (3.51)$$

$$H' = \frac{1}{\varepsilon} H_{-1} + H_0 + \varepsilon H_1 + \dots \quad (3.61)$$

$$H_{-1} = q\varphi' + \frac{\alpha}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \quad (3.62)$$

$$J^* = \oint [m(\vec{W} + \vec{u}) + q\vec{A}]_t \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\vec{C} + \vec{a})_t d\vartheta = \text{const} \quad (4.2)$$

$$m \left( \frac{d\vec{u}_\parallel}{dt} \right) \cdot \widehat{B} \approx q \vec{E}_\parallel - M \frac{\partial B}{\partial s} \widehat{B} \quad (4.6)$$

$$H_\parallel = q\varphi + q\alpha \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{1}{2} mu_\parallel^2 + MB \quad (4.7)$$

$$J_\parallel^* \equiv J = \oint \left[ p_\parallel \frac{\partial s}{\partial \vartheta_\parallel} \right]_t d\vartheta_\parallel = m \oint u_\parallel ds \approx \text{const} \quad (4.8)$$

$$J = \oint p_{\parallel} ds = m \int_0^{\hbar} u_{\parallel}^2 dt = m \langle u_{\parallel}^2 \rangle t_{\parallel} = \text{const} \quad (4.9)$$

$$J = m \oint u_{\parallel}(s') ds'; \quad u_{\parallel} = (2/m)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left( H_{\parallel} - q\varphi - q\alpha \frac{\partial \beta}{\partial t} - MB \right)^{1/2} \quad (4.24)$$

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = -\frac{1}{q} \frac{\partial H_{\parallel}}{\partial \beta} \quad (4.44)$$

$$\langle \dot{\beta} \rangle = \frac{1}{q} \frac{\partial H_{\parallel}}{\partial \alpha} \quad (4.45)$$

$$\ddot{\zeta} + \omega^2(t) \zeta = 0 \quad (4.62)$$

$$M_0 = (q/2\omega_0) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)_0 = (q/2\omega_0) \langle |\dot{z}_1|^2 \rangle_0 \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(\vec{n}\vec{v}) = 0 \quad (5.17)$$

$$nm \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = n(\vec{F} + q\vec{v} \times \vec{B}) - \text{div} \pi \quad (5.20)$$

$$\pi_{jk} = p_{\parallel} \hat{B}_j \hat{B}_k + p_{\perp} (\delta_{jk} - \hat{B}_j \hat{B}_k) \quad (5.21)$$

$$\text{div} \pi = \vec{\nabla}_{\parallel} p_{\parallel} - \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B} \vec{\nabla}_{\parallel} B + \vec{\nabla}_{\perp} p_{\perp} + \\ + (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\hat{B} \cdot \nabla) \hat{B} \quad (5.24)$$

$$\vec{n}\vec{v}_{\perp} = (n\vec{F} - \text{div} \pi) \times \vec{B}/qB^2 - nm \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] \times \vec{B}/qB^2 \quad (5.52)$$

$$\vec{v} \approx \vec{v}_{\parallel} + \vec{F} \times \vec{B}/qB^2; \quad \vec{v}_{\parallel} \approx \vec{u}_{\parallel}; \quad v_g \approx O(\varepsilon) \quad (5.55)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) (p/n^{5/3}) = 0 \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial n}{\partial t} = \left( \vec{F} \times \vec{B}/qB^2 - m \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{B}/qB^2 + \vec{v}_{\parallel} \right) \cdot \vec{\nabla} n + \\
& + (2/qB^3) (\vec{B} \times \vec{\nabla} B) \cdot \text{div } \vec{\pi} + n \text{div} \left( \vec{F} \times \vec{B}/qB^2 - m \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{B}/qB^2 \right) + \\
& + (1/qB^2) \text{div} (\vec{B} \times \text{div } \vec{\pi}) + nB (\widehat{v}_{\parallel} \cdot \vec{\nabla}) (v_{\parallel}/B) \quad (5.62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial n}{\partial t} + \vec{U}_n \cdot \vec{\nabla} n + n \text{div} \left[ \vec{u}_F + \frac{m}{qB^2} \vec{B} \times \frac{d}{dt} (\vec{v}_{\parallel} + \vec{u}_F) \right] + \\
& + \frac{n}{qB^2} [2\widehat{B} \times \vec{\nabla} B + (\text{rot } \vec{B})_{\perp}] \cdot \vec{\nabla} K_{\perp} + \\
& + \frac{n}{qB^2} \text{div} \{ (2K_{\parallel} - K_{\perp}) [\widehat{B} \times \vec{\nabla} B + (\text{rot } \vec{B})_{\perp}] \} - \\
& - \frac{2n}{qB^5} (2K_{\parallel} - K_{\perp}) (\vec{B} \times \vec{\nabla} B) \cdot (\vec{B} \times \text{rot } \vec{B}) + nB (\widehat{v}_{\parallel} \cdot \vec{\nabla}) \times \\
& \quad \times (v_{\parallel}/B) = 0 \quad (5.67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial n}{\partial t} - \frac{n}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial t} - (1/q) \vec{F} \cdot [(n/B^2) \text{rot } \vec{B} - \vec{B} \times \vec{\nabla} (n/B^2)] + \\
& + \vec{v}_{\parallel} \cdot \vec{\nabla} n + nB (\widehat{v}_{\parallel} \cdot \vec{\nabla}) (v_{\parallel}/B) = 0 \quad (6.12)
\end{aligned}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_F \cdot \vec{\nabla} \right) (n/B^2) = 0; \quad \vec{v}_{\parallel} = 0 \quad (6.13)$$

$$\frac{dp_j}{dt} = 0; \quad p_j = \text{const} = p_{j0} = mh_{j0}^2 \dot{q}_{j0} + qh_{j0} A_{j0} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{eq} & \equiv \frac{1}{2} m (\omega_m^2 + \omega_n^2) = H - H_0 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 + \\
& + m (\varphi_{g0} - \varphi_g) + q (\varphi_0 - \varphi) - (1/2 mh_j^2) [mh_{j0} \omega_{j0} + \\
& + q (h_{j0} A_{j0} - h_j A_j)]^2 \geq 0 \quad (7.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{eq} & = \frac{1}{2} m \omega_0^2 + m (\varphi_{g0} - \varphi_g) + q (\varphi_0 - \varphi) - \\
& - (1/2 m r^2) [m r_0 \omega_{\varphi 0} + q (r_0 A_{\varphi 0} - r A_{\varphi})]^2 \geq 0 \quad (7.13)
\end{aligned}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^* + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}^* \quad (7.23)$$

$$m \frac{d\vec{\omega}^*}{dt} = q\vec{E}^* + q\vec{\omega}^* \times \vec{B}^* - m\nabla\varphi_g \quad (7.32)$$

$$R_m = (\sin\Theta)^{-2} + 2q(\varphi_0 - \varphi_m)/mW_0^2 \quad (7.40)$$

$$\vec{E}_0 \approx - (m_i/e) \vec{g} + (1/eN) (\operatorname{div} \vec{\pi}_{i0})_{\perp} - \frac{1}{2} (m_i/e) \vec{\nabla} (\vec{\Omega} \times \vec{\rho})^2 \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial n_v}{\partial t} = \operatorname{div} (n_v \vec{v}_v) = & -2 \operatorname{div} \left[ \frac{n_v}{\omega_v B} \vec{B} \times (\vec{v}_v \times \vec{\Omega}) \right] - \\ & - (\vec{\nabla} \tilde{\varphi} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla} (n_v B^2) + \frac{1}{B} \left( \frac{1}{\omega_v} - \frac{1}{\omega_i} \right) \times \\ & \times \left\{ \left[ \vec{g} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{\Omega} \times \vec{\rho})^2 \right] \times \vec{B} \right\} \cdot \vec{\nabla} n_v + \frac{2}{q_v B^3} (\vec{B} \times \vec{\nabla} B) \times \\ & \times \operatorname{div} \vec{\pi}_v - \frac{1}{q_v B^3} \vec{B} \cdot \operatorname{rot} (\operatorname{div} \vec{\pi}_v) - (1/eNB^2) (\vec{B} \times \operatorname{div} \vec{\pi}_{i0}) \times \\ & \times \vec{\nabla} n_v - \operatorname{div} \left\{ \frac{N}{\omega_v B} \left[ \vec{\nabla}_{\perp} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{n_v q_v} - \operatorname{div} \vec{\pi}_v \right)_{\perp} \right] \right\} - \\ & - \operatorname{div} \left\{ \frac{N}{\omega_v^2} \left[ \frac{\partial^2 \vec{v}_{v\perp}}{\partial t^2} - 2 \left( \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial t} \times \vec{\Omega} \right)_{\perp} \right] \right\} \quad (8.9) \end{aligned}$$

$$\tilde{n}_i - \tilde{n}_e = - (\varepsilon_0/e) \vec{\nabla}^2 \tilde{\varphi} \quad (8.10)$$

$$\tilde{p}_v = (5P_v/3N) \tilde{n}_v \quad (8.43)$$

$$\vec{u}_{Bv} = (10P_v/3Nq_v B^3) \vec{B} \times \vec{\nabla} B \quad (8.46)$$

$$m \frac{d}{dt} (\gamma \vec{\omega}) = \frac{d}{dt} (\vec{P}) = q (\vec{E} + \vec{\omega} \times \vec{B}) \quad (9.28)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = q\vec{\omega} \cdot \vec{E}; \quad \varepsilon = \gamma mc^2 \quad (9.29)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Störmer C. Arch. Sci. Phys. Genève, **24**, 5, 113, 221, 317 (1907).
2. Thomson J. J. Cambridge Phil. Soc. Proc., **15**, 465 (1910).
3. Rutherford E. Philos. Mag., **21**, 669 (1911).
4. Bohr N. Philos. Mag., **26**, 1 (1913).
5. Busch H. Ann. phys., **81**, 974 (1926).
6. Hale G. E. Astrophys. J., **28**, 315 (1908).
7. Ferraro V. C. A. Monthly. Notes. Roy. Astron. Soc., **97**, 458 (1937).
8. Alfvén H. Arkiv Mat., Astr., Fysik, **29B**, No. 2 (1942); Nature, **150**, 405 (1942).
9. Alfvén H. Arkiv. Mat., Astr., Fysik, **27A**, No. 22 (1940).
10. Альфвен Х. Космическая электродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
11. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
12. Spitzer L. Astrophys. J., **116**, 299 (1952).
13. Спитцер П. Физика полностью ионизованного газа. М., «Мир», 1965.
14. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1963.
15. Simon A. L. An Introduction to Thermonuclear Research. Pergamon Press, 1960.
16. Роуз Д., Кларк М. Физика плазмы и управляемые термоядерные реакции. М., Госатомиздат, 1963.
17. Allis W. P. Handbuch der Physik, ed. by S. Flugge (Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg), 1956, v. 21, p. 383.
18. Fünfer E., Lehner G. Ergebnisse der Exakten Naturwissenschaften, ed. by S. Flügge and F. Trendelenburg, Springer-Verlag, 1962, v. 34.
19. Chandrasekhar S. The Plasma in a Magnetic Field, ed. by R. K. M. Landshoff. Stanford Univ. Press, 1958, p. 3.
20. Данжи Дж. Космическая электродинамика. М., Госатомиздат, 1961.
21. Delcroix J. L. Introduction to the Theory of ionized Gases. N. Y., Interscience Publ., 1960.
22. Альфвен Х., Фёльтхаммер К. Космическая электродинамика. М., «Мир» (в печати).
23. Linhart J. G. Plasma Physics. Amsterdam, North-Holland Publ. Comp. 1960.
24. Ferraro V., Plumpton C. An Introduction to Magnetofluid Mechanics. Oxford University Press, 1961.
25. Лонгмайр К. Физика плазмы. Перев. с англ. М., Атомиздат, 1966.



26. Thompson W. B. An Introduction to Plasma Physics. Pergamon Press, Oxford — Ld. — N. Y. — Paris, 1962.
27. Франк-Каменецкий Д. А. Лекции по физике плазмы. М., Атомиздат, 1964.
28. Пикельнер С. Б. Основы космической электродинамики. М., «Наука», 1966.
29. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Физматгиз, 1962.
30. Стрэттон Дж. Теория электромагнетизма М., Гостехиздат, 1948.
31. Гайтлер В. Квантовая теория излучения М., Изд-во иностр. лит., 1956.
32. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
33. Голдстейн Г. Классическая механика. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
34. Jacobi C. G. J. Crelle's J., 27, 199 (1844).
35. Störmer C. Videnskapet i Kristiana, Skrifter, Mat. — naturv. klasse 23 : 1 (1916).
36. Sweet P. A. Monthly. Nater. Roy. Astron. Soc, 110, 69 (1950).
37. Lundquist S. Arkiv. Fysik, 5, 297 (1952).
38. Грэд, Рубин. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные доклады иностранных ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959.
39. Newcomb W. A. Ann physics, 3, 347 (1958).
40. Newcomb W. A. UCRL-4618, Livermore, Calif. (1955).
41. Block L. Tellus, 8, 234 (1956).
42. Burgers J. M. Ann. Physik, 52, 195 (1917).
43. Krutkow S. Proc. Amsterdam Acad, 21, 1112 (1918).
44. Борн М. Лекции по атомной механике. Т. 1. Харьков — Киев, Гостехиздат УССР, 1934.
45. Крускал М. Адиабатические инварианты. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
46. Kruskal M. D. PM — S-33, NYO — 7903, Project Matterhorn. Princeton Univ., 1958.
47. Brinkman H. C. Physica, 25, 1016 (1959).
48. Brinkman H. C. Int. Summer Course in Plasma Physics. ed. by C. F. Wandel. Danish Atomic Energy Commission, Risø, 1960, p. 25.
49. Lehnert V. Progress in Nuclear Energy. Ed. by J. L. Tuck. Ser. XI, vol. II. Pergamon Press, 1962.
50. Андерсон и др. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные доклады иностранных ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959.
51. Anderson O. A., Baker W. R., Bratenahl A., Furth H. P. and Kunkel W. B. J. Appl. Phys., 30, 188 (1959).
52. Poincaré H. Comptes rend. Acad. sci., 123, 930 (1896).
53. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1961.
54. Lüst R. Kosmische Strahlung. Ed. by W. Heisenberg. Springer-Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1953, p. 9.
55. Vallarta M. S. Handbuch der Physik. Ed. by S. Flügge.

- v. 46/1, 1. Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1961.
56. Störmer C. The Polar Aurorae. Oxford Univ. Press, 1955.
  57. Brunberg E. A. Tellus, 5, 135 (1955); 8, 215 (1956).
  58. Brunberg E. A., Dattner A. Tellus, 5, 269 (1955).
  59. Hertweck F. Z. Naturforsch., 14a, 47 (1959).
  60. Aström E. Tellus, 8, 260 (1956).
  61. Янке Э., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М., Физматгиз, 1959.
  62. Hertweck F., Schlüter A. Z. Naturforsch., 12a, 844 (1957).
  63. Störmer G. Z. Astrophys., 1, 237 (1930); Astrophys. norveg., 1, 1, 115 (1934); 2, 1, 123 (1936); Univ. Publ. Univ. Obs. Oslo, No 10, No 12, (1934).
  64. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н. «Укр. матем. ж.», 7, 5 (1955).
  65. Hellwig G. Z. Naturforsch., 10a, 508 (1955).
  66. Vandervoort P. O. Ann. Physics, 10, 401 (1960).
  67. Northrop T. G. UCRL-5708-T. Berkley, Calif., 1960.
  68. Northrop T. G. UCRL-9517. Berkley, Calif., 1961.
  69. Сивухин Д. В. Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях В сб. «Вопросы теории плазмы». Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963, стр. 7.
  70. Berkowitz J., Gardner C. S. Commun. Pure and Appl. Math., 12, 501 (1959).
  71. Thomson J. J. Conduction of Electricity through Gases. 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1906.
  72. Rosenbluth M. N., Krall N. A., Rostoker N. Nuclear Fusion, Suppl. P. 1, 143 (1962).
  73. Chandrasekhar S., Trehan S. K. Plasma Physics. Univ. of Chicago Press, 1960.
  74. Gardner C. S. Phys. Rev., 115, 791 (1959); Conf. on Controlled Fusion Research. Gatlinburg, Tenn., April (1959).
  75. Taniuti T. NYO-9755. N. Y., Univ. (1961).
  76. Fermi E. Astrophys. J., 119, 1 (1954).
  77. Rosenbluth M. N. USAEC Report, LA-2030 (1956).
  78. Northrop T. G., Teller E. Phys. Rev., 117, 215 (1960).
  79. Гаррен и др. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные доклады иностранных ученых. Т. 1. М., Госатомиздат, 1959, стр. 240.
  80. Кадомцев Б. Б. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М., Изд-во АН СССР. Т. III, 1958, стр. 258.
  81. Kulsrud R. M. Phys. Rev., 106, 205 (1957).
  82. Lenard A. L'Eclairag Elecrique, 1898.
  83. Broer L. J. F., Van Wijngaarden L. Appl. Sci. Res., B8, 1959.
  84. Tamor S. J. Nucl. Energy, Part C, 1, 199 (1960).
  85. Анкудинов В. А и др. «Ж. технич. физ.», 32, 22 (1962); 33, 19 (1963); 34, 23 (1964).
  86. Чириков Б. В. J. Nucl. Energy, Part C, 1, 253 (1960).
  87. Grad H., N. Y. Univ. Rep. MF-19 (1961); Microwave Symp. Ser., Vol XI, Polytechnic Press, Brooklyn. N. Y., 1961, p. 37.

- 88 Гиршфельдер Дж., Кёртис Ч., Бёрд Р. Б. Молекулярная теория жидкостей и газов. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
89. Brandstatter J. J. *Waves, Rays and Radiation in Plasma Media*, Mc Grow-Hill Book Co., 1963.
90. Chew C. F., Goldberger M. L., Low F. E. *Proc. Roy. Soc.*, **A236**, 112 (1956).
91. Chandrasekhar S., Kaufman A. N., Watson K. M. *Ann. Phys.*, **2**, 435 (1957)
92. Marshall W., Harwell (UK), Report AERE, T/R 2419 (1958).
93. Kaufman A. N., *Phys. Fluids*, **3**, 610 (1960)
94. Spitzer L. *Rev. Mod. Phys.*, **32**, 696 (1960).
95. Thompson W. B. *Reports on Progress in Physics*, ed by A. C. Stickland, The Inst. of Physics and Physical Society, 1961, Vol. 24, p. 363.
- 96 Roberts K. V., Taylor J. B. *Phys. Rev. Letters*, **8**, 197 (1962).
97. Schlüter A. *Ann. Physik*, **6—10**, 422 (1952)
98. Chandrasekhar S., Kaufman A. N., Watson K. M. *Ann. Phys*, **5**, 1 (1958).
- 99 Astrom E. *Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics*, International Astronomical Union Symposium, No. 6, ed. by Lehnert, Cambridge Univ. Press, 1958, p. 81.
100. Lundquist S. *Scuola Internazionale di Fisica, Corso XIII, Varena, Sept. 1959*; *Nuovo Cimento Suppl* (1960).
101. Lehnert B. *Nuclear Fusion, Suppl.*, part 1, 135 (1962); *Phys. Fluids*, **5**, 432 (1962).
102. Cowling T. G. *Mon. Not. Roy. Astr., Soc.*, **92**, 407 (1932).
103. Bohr N. *Studier over Metallernes Elektronteori*, Dissertation, Copenhagen, 1911.
104. Leeuwen J. H. van. *J. De Phys.*, (6) **2**, 361 (1921).
105. Walén C. *Ark. f. Mat., Astr o Fysik.*, **33A**, No. 18 (1946).
106. Пост В. В. в кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». *Избранные докл. иностр. ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, стр. 548.*
107. Alfvén H. *Tellus*, **6**, 232 (1954).
108. Schlüter A. *Z. f. Naturforschung*, **12a**, 822 (1957).
109. Herlofson N. *Nature*, **165**, 1020, (1950)
110. Hoffmann F., Teller E. *Phys. Rev.*, **80**, 692 (1950).
111. Hulst H. C. van de. *Int. Union of Theor. and Appl. Mech. and Int. Astr. Union, Proc Symposium, Paris, Dayton, Ohio; Central Air Documents Office, 1951.*
112. Parker E. N. *Phys. Rev.*, **109**, 1874 (1958).
113. Lüst R. *Int. Summer Course in Plasma Physics*, ed. by C. F. Wandel, Danish Atomic Energy Commission, Riso, 1960, p. 201.
114. Chandrasekhar S., Kaufman A. N., Watson K. M. *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A245**, 435 (1958).
115. Сагдеев Р. З. и др. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». *Доклады советских ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959.*
- 116 Вedenov A. A. и др. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Же-

- нева, 1958». Доклады советских ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959.
117. Арсеньев Ю. И. и др. Nuclear Fusion, Suppl., Part, 2, 687 (1962).
  118. Косслет В. Введение в электронную оптику. М., Изд-во иностр. лит, 1950.
  119. Lüst R., Schlüter A. Z. f. Naturforschung, 12a, 841 (1957)
  120. Lehnert B. Nature, 181, 331 (1958).
  121. Lehnert B. J. Nucl. Energy, Part C, 1, 40 (1959).
  122. Lehnert B. Ark. f. Physik, 18, 251 (1960); Rev. Mod. Phys., 32, 1012 (1960).
  123. Fisser H., Kippenhahn R. Z. Naturforschung, 14a, 37 (1959).
  124. Bonnevier B., Lehnert B. Ark. f. Fysik, 16, 231 (1960).
  125. Aström E. Ark. für Fysik, 2, 443 (1950).
  126. Бойер и др. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные доклады иностр. ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959.
  127. Longmire C. L., Nagle D., Ribe F. Phys. Rev., 114, 1187 (1959).
  128. Коэнсген и др. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии Женева, 1958». Избранные доклады иностранных ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, стр. 584
  129. Mozer J. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Math.—Phys. Klasse, 1962.
  130. Gardner C. S. сМ. Nyo—9191 J. Berkowitz (1962).
  131. Allen J. A., van. J. Geophys. Research, 64, 1683 (1959).
  132. Greyber H. D. Aerophys. Op. Techn. Mem., 100, Gen. Electr. (October 1958).
  133. Colgate S., Furth H. P. UCRL Rep. 5392, Nov. (1958).
  134. Birdsall D. H., Colgate S. A., Furth H. P. Proc. of the Fourth Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, ed. by R. Nilsson, North—Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1960, vol. II, p. 892.
  135. Кристофилос. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные доклады иностранных ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, стр. 597.
  136. Альфвен. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные докл. иностранных ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, стр. 5.
  137. Проект Шервуд. Под ред. А. Бишоп. Перев. с англ. М., Атомиздат, 1960.
  138. Fahlson U. V. Phys. Fluids, 4, 123 (1961).
  139. Angerth B. et al. Nuclear Fusion, Suppl. Part 1, 39 (1962).
  140. Alfvén H. On the origin of the solar system. Clarendon Press, Oxford, 1954.
  141. Берковиц, Град и Рубин. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные доклады иностранных ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, стр. 109.

142. Bernstein I. B., Frieman E. A., Kruskal M. D., Kulsgud R. M. Proc. Roy. Soc., **A244**, 17 (1958).
143. Проект Шервуд. Под ред. А. Бишопа. Перев. с англ. М., Атомиздат, 1960.
144. Барнет и др. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные доклады иностранных ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, стр. 302.
145. Арцимович Л. А. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Доклады советских ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959.
146. Thoenemann P. C. et al. Nature, **181**, 217 (1958).
147. Батти и др. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные доклады иностранных ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, стр. 370.
148. Проект Шервуд. Под ред. А. Бишопа. Перевод с англ. М., Атомиздат, 1960.
149. Kruskal M. D. USAEC, Rep. No. NYO—998 (PM—S—5) (1952); USAEC, REP. No. NYO—6045 (PM—S—12) (1954).
150. Спитцер Л. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные доклады иностранных ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, стр. 505.
151. Краскал и др. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные доклады иностранных ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, стр. 547.
152. Джонсон и др. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные доклады иностранных ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, стр. 193.
153. Иоффе М. С. Nuclear Fusion, Suppl, Part 3 (1962); см. также Готт Ю. В., Иоффе М. С., Тельковский В. Г. Nuclear Fusion, Suppl., Part 3, 1045 (1962).
154. Grad H., van Norton R. Nuclear Fusion, Suppl, Part 1, 61 (1962).
155. Родионов С. Н. J. Nucl. Energy, Part C, **1**, 247 (1960).
156. Gibson G. J. W. C., Lauer E. J. Nuclear Fusion, Suppl., Part 1, 151 (1962).
157. Longmire C. L., Rosenbluth M. N. Phys. Rev., **103**, 507 (1956).
158. Simon A. Phys. Rev., **100**, 1557 (1955).
159. Чандрасекхар С. Принципы звездной динамики. М., Изд-во иностр. лит., 1947.
160. Rostoker N., Rosenbluth M. N. Phys. Fluids, **3**, 1 (1960).
161. Pines D., Bohm D. Phys. Rev., **85**, 338 (1952).
162. Judd D., Mac Donald W., Rosenbluth M. N. UCRL—2931, Berkeley, Calif. (1955).
163. Kaufman A. N. Conf. on Controlled Thermonuclear Res., Gathlinburg, Tenn. AEC report TID—7520 (Part 2), p. 387 (1956).

164. Chandrasekhar S. Hydrodynamic, Hydromagnetic Stability, Oxford Univ. Press, 1961.
165. Lundquist S. Phys. Rev., **83**, 307 (1951).
166. Kruskal M. D., Schwarzschild M. Proc. Roy. Soc., **A223**, 348 (1954).
167. Проект Шервуд. Под ред. А. Бишона Перев с англ. М., Атомиздат, 1960.
168. Rosenbluth M. N., Longmire C. L. Ann. Phys., **1**, 120 (1957).
169. Lehnert V. Phys. Fluids, **4**, 525, 847 (1961); Phys. Rev. Letters, **7**, 440 (1961).
170. Lehnert V. Phys. Fluids, **5**, 740 (1962).
171. Михайловский А. Б. В сб. «Вопросы теории плазмы». Вып. 3. М., Атомиздат, 1963, стр. 141.
172. Furth H. P. Int. School of Physics, XXV Course, Advanced Plasma Theory, Varenna, Italy; Nuovo Cimento. Suppl. (1962).
173. Furth H. P., Killen J., Rosenbluth M. N. Calham Study Group of Plasma Instabilities, Harwell (1962).
174. Ware A. A. J. Nucl. Energy, Part C, **3**, 93 (1961).
175. Tayler R. J. Nuclear Fusion, Suppl., Part 3, 877 (1962).
176. Taylor J. B. J. Nuclear Energy, Part C, **4**, 401 (1962).
177. Post R. F. et al. Phys. Rev. Letters, **4**, 166, (1960).
178. Богданов Г. Ф. и др. Nuclear Fusion, Suppl., Part 1, 215 (1962).
179. Кадомцев Б. Б., Недоспасов А. В. J. Nucl. Energy, Part C, **1**, 230 (1960).
180. Кадомцев Б. Б. «Ж. техн. физ.», **31**, 1273 (1961).
181. Lehnert V. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958». Избранные доклады иностр. ученых. Т. I. М., Атомиздат, 1959, стр. 648.
182. Hoh F. C., Lehnert V. Phys. Fluids, **3**, 600 (1960).
183. Hoh F. C., Lehnert V. Phys. Rev. Letters, **7**, 75 (1961).
184. Эйнштейн А. Сущность теории относительности. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
185. Бергман П. Введение в теорию относительности. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
186. Richtmyer F. K., Kennard E. H. Introduction to Modern Physics (Mc. Grow-Hill Book Comp., N. Y., and Lond., 1947).
187. Møller C. The Theory of Relativity, Oxford, Clarendon Press, 1952.
188. Minkowski H. Ann. Physik, **47**, 927 (1915).
189. Fälthammar C. G. J. Geophys. Res., **67**, 1791 (1962).
190. Klein O. Lectures on the Theory of Relativity at the University of Stockholm, 1950.
191. Bekefi G., Brown S. C. Amer. J. Phys., **29**, 404 (1961).
192. Rosenbluth M. N. Int. Summer Course in Plasma Physics, ed. by C. F. Wandel, Danish Atomic Energy Commission, Risø, 1960, p. 301.
193. Post R. F. Plasma Dynamics, ed. by F. C. Clauser. Addison--Wesley Publ. Comp., Reading Mass. USA and London, 1960, p. 30.
194. Lienard A. L'Eclairage Electrique (1898).
195. Wiechert E. Arch. Neerland, **5**, 549 (1900).

- 196 Черенков П. А. *Phys. Rev.*, **52**, 378 (1937).
- 197 Linhart J. G. *J. Appl. Phys.*, **26**, 527 (1955).
- 198 Kihara T., Aono O., Sugihara R. *Nuclear Fusion*, **1**, 181 (1961).
199. Schott G. A. *Electromagnetic Radiation*. Cambridge Univ. Press, 1912.
200. Tzu H. Y. *Proc Roy. Soc*, **A192**, 231 (1948).
201. Померанчук Я. И. *Phys. Acad Sci USSR*, **2**, No. 1 (1940).
- 202 Alfvén H., Herlofson N. *Phys. Rev.* **78**, 616 (1950).
203. Шкловский П. С. «Астрон. ж.», **90**, 15 (1953)
204. Шкловский П. С. *Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics*, International Astronomical Union Symposium No 6, Ed by V. Lehnert. Cambridge Univ. Press, 1958, p 520.
- 205 Шкловский И. С. *Космическое радиоизлучение* М, Гостехиздат, 1956.
206. Chang D. B. *Synchrotron Radiation as the Source of Polarized Decimeter Radiation from Jupiter*, Boeing Res. Lab. Rep. No. D-1-82-0129 (1962).
207. Трубников Б. А. «Докл. АН СССР», **118**, 913 (1958).
208. Трубников Б. А., Кудрявцев. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1957». Доклады советских ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, стр. 165
209. Трубников Б. А., Батанова А. Е. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. III. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 191.
210. Drummond W. E., Rosenbluth M. N. *Phys. Fluids*, **3**, 45 (1960).
211. Beard D. B. *Phys. Fluids*, **2**, 379 (1959).
212. Hirschfield J L, Baldwin D. E., Brown S. C. *Phys. Fluids*, **4**, 198 (1961).
213. Beard D. B., Baker J. C. *Phys. Fluids*, **4**, 611 (1961).
214. Drummond W. E., Rosenbluth M. N. *Phys. Fluids*, **4**, 277 (1961); *Bull. Amer. Phys. Soc.*, **6**, 205 (1961).
215. Drummond J. E. *Radiation and Waves in Plasmas*, ed. by M. Mitchner Stanford Univ. Press, 1961, p. 98.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию . . . . .	3
--	---

## Глава 1 ВВЕДЕНИЕ

§ 1.1. Исторический обзор . . . . .	5
§ 1.2. Динамика ионизованного газа . . . . .	6

## Глава 2 ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 2.1. Электромагнитная теория . . . . .	9
1.1. Уравнения Максвелла . . . . .	10
1.2. Координаты магнитного поля . . . . .	13
1.3. Магнитные силовые линии . . . . .	14
§ 2.2. Уравнение движения . . . . .	21
2.1. Законы сохранения . . . . .	21
2.2. Законы подобия . . . . .	22
§ 2.3. Гамильтонов формализм . . . . .	24
3.1. Канонические уравнения . . . . .	24
3.2. Интегралы движения . . . . .	28
3.3. Периодическое и почти периодическое движения . . . . .	30
§ 2.4. Частные случаи решения уравнений движения . . . . .	34
4.1. Однородное магнитостатическое и электрическое поля . . . . .	34
4.2. Магнитостатическое поле с аксиальной симметрией . . . . .	41
4.3. Гиперболическое магнитное поле . . . . .	48
4.4. Однородное, зависящее от времени магнитное поле . . . . .	51

## Глава 3 ДРЕЙФОВАЯ ТЕОРИЯ

§ 3.1. Движение ведущего центра . . . . .	53
1.1. Дрейфовая теория в первом приближении по параметру $\epsilon$ . . . . .	58
1.2. Законы подобия . . . . .	63
1.3. Приближения более высокого порядка . . . . .	69
§ 3.2. Поток частиц и токи . . . . .	74
§ 3.3. Гамильтонова формулировка приближения ведущего центра . . . . .	80



## Глава 4

### АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

§ 4.1. Теория первого порядка . . . . .	86
1.1. Общее рассмотрение . . . . .	87
1.2. Эквивалентный магнитный момент . . . . .	99
1.3. Продольный адиабатический инвариант . . . . .	103
1.4. Уравнения движения для среднего дрейфа частицы . . . . .	112
1.5. Поточковый инвариант . . . . .	117
§ 4.2. Инвариантность в высших приближениях. Одномерная задача . . . . .	121
2.1. Определения адиабатической инвариантности . . . . .	121
2.2. Скачок магнитного поля . . . . .	127
2.3. Медленно меняющееся магнитное поле . . . . .	128
§ 4.3. Инвариантность в высших приближениях. Трехмерная задача . . . . .	132
§ 4.4. Некоторые общие вопросы теории адиабатической инвариантности . . . . .	137

## Глава 5

### МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

§ 5.1. Уравнение Больцмана . . . . .	141
1.1. Теорема Лиувилля . . . . .	141
1.2. Уравнение Власова . . . . .	142
1.3. Макроскопические законы сохранения . . . . .	144
1.4. Приближенное решение уравнения Власова . . . . .	150
§ 5.2. Связь между микроскопической и макроскопической теориями . . . . .	153
2.1. Уравнение движения . . . . .	153
2.2. Адиабатические изменения состояния . . . . .	157
2.3. Поток частиц, ведущих центров и распределение плотности . . . . .	160

## Глава 6

### МАГНИТНОЕ СЖАТИЕ

§ 6.1. Связь между плотностью частиц и величиной магнитного поля . . . . .	172
§ 6.2. Механизмы сжатия и нагрева . . . . .	177
2.1. Сжатие плазмы в ловушке с магнитными пробками . . . . .	178
2.2. Альфвеновский механизм нагрева . . . . .	184
2.3. Гирорелаксационный эффект . . . . .	188
§ 6.3. Магнитогидродинамические волны . . . . .	190

## Глава 7

### УДЕРЖАНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

§ 7.1. Обзор различных принципов удержания . . . . .	198
§ 7.2. Запрещенные области . . . . .	200
2.1. Симметричные конфигурации . . . . .	201
2.2. Вращающиеся системы . . . . .	208
§ 7.3. Удержание частиц в различных конфигурациях магнитного поля . . . . .	215

3.1. Полоидальные поля . . . . .	215
3.2. Торонидальные поля . . . . .	224
3.3. Асимметричные конфигурации . . . . .	229
§ 7.4. Механизмы ухода частиц из ловушки . . . . .	231
4.1. Эффекты неадиабатичности . . . . .	231
4.2. Диффузия в координатном пространстве . . . . .	233
4.3. Диффузия в пространстве скоростей . . . . .	236
4.4. Амбиполярные эффекты . . . . .	239
4.5. Неустойчивости . . . . .	239

## Глава 8

### УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ

§ 8.1. Основные положения . . . . .	241
§ 8.2. Желобковые возмущения . . . . .	243
2.1. Физическая картина механизма неустойчивости . . . . .	243
2.2. Основные соотношения . . . . .	249
2.3. Неустойчивость резкой границы плазмы в поле силы тяжести при малых ларморовских радиусах . . . . .	255
2.4. Учет конечного градиента плотности . . . . .	261
2.5. Эффекты, связанные с конечностью ларморовского радиуса . . . . .	266
2.6. Эффект магнитного сжатия . . . . .	270
2.7. Влияние кориолисовых сил . . . . .	275
2.8. Заключение . . . . .	277
§ 8.3. Винтовые возмущения . . . . .	280

## Глава 9

### РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ

§ 9.1. Теория относительности и электромагнитные поля . . . . .	283
1.1. Преобразование Лоренца . . . . .	283
1.2. Электрические заряды и токи . . . . .	285
1.3. Тензор электромагнитного поля . . . . .	287
§ 9.2. Релятивистские уравнения движения . . . . .	288
§ 9.3. Некоторые применения релятивистских уравнений движения . . . . .	291
3.1. Магнитостатические поля . . . . .	291
3.2. Однородные статические магнитное и электрическое поля . . . . .	291
§ 9.4. Теория возмущений . . . . .	295
4.1. Исходные предположения и основные уравнения . . . . .	295
4.2. Уравнение движения ведущего центра . . . . .	298
4.3. Эквивалентный магнитный момент частицы . . . . .	299
4.4. Движение ведущего центра в почти взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях . . . . .	300

## Глава 10

### ИЗЛУЧЕНИЕ

§ 10.1. Роль излучения в физике плазмы . . . . .	305
§ 10.2. Поле движущегося заряда . . . . .	306
2.1. Потенциалы движущегося заряда . . . . .	306
2.2. Поле движущегося заряда . . . . .	308

2.3.	Энергия, излучаемая движущимся зарядом . . . . .	310
§ 10.3.	Тормозное излучение . . . . .	311
§ 10.4.	Черенковское излучение . . . . .	313
§ 10.5.	Циклотронное излучение . . . . .	314
5.1.	Мощность, излучаемая из оптически прозрачной плазмы . . . . .	314
5.2.	Спектр излучения отдельной частицы . . . . .	318
5.3.	Коэффициент излучения . . . . .	322
5.4.	Коэффициент поглощения . . . . .	325
5.5.	Излучение из плоского слоя плазмы . . . . .	326
5.6.	Баланс энергии в термоядерном реакторе . . . . .	329
<b>Приложение</b>	, , . . . . .	<b>332</b>
<b>Литература</b>	, , . . . . .	<b>341</b>

Б. Ленерт

ДИНАМИКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Редактор Ю. Р. Кривонос  
Худ. редактор А. С. Александров  
Техн. редактор С. М. Попова  
Корректор Т. В. Минаева

Сдано в набор 3/II 1967 г.  
Подписано в печать 12/X 1967 г.  
Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>, типографская № 2  
Усл. печ. л. 18,48 Уч.-изд. л. 17,5  
Тираж 2700 экз. Заказ изд. 1514  
Цена 1 р. 31 к. Заказ тип. 70  
Атомиздат, Москва, К-31, ул. Жданова, 5/7

Московская тип. № 6 Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете Министров СССР  
Москва, Ж-88, 1-й Южно-портовый пр. 17

Б. Ленерт • Динамика заряженных частиц

Б. Ленерт

Динамика  
заряженных  
частиц

